Б.П.ДЕМИДОВИЧ

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

13-е издание, исправленное

Рекомендовано Государственным комитетом Российской Федерации по высшему образованию в качестве учебного пособия для студентов математических и физических специальностей высших учебных заведений

Издательство Московского университета

Издательство ЧеРо

1997

ББК 22.161
Д30
УДК 517(075.8)

Рецензент: кафедра высшей математики МФТИ

Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета

Демидович Б.П.

Д30 Сборник задач и упражнений по математическому анализу: Учеб. пособие. — 13-е изд., испр. — М.: Изд-во Моск. ун-та, ЧеРо, 1997. — 624 с.

ISBN 5-211-03645-X

В сборник (11-е изд. — 1995 г.) включено свыше 4000 задач и упражнений по важнейшим разделам математического анализа: введение в анализ; дифференциальное исчисление функций одной переменной; неопределенный и определенный интегралы; ряды; дифференциальное исчисление функций нескольких переменных; интегралы, зависящие от параметра; кратные и криволинейные интегралы. Почти ко всем задачам даны ответы. В приложении помещены таблицы.

Для студентов физических и механико-математических специальностей высших учебных заведений.

Учебное издание

Демидович Борис Павлович

СБОРНИК ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ
ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Зав. редакцией *Л.А.Николова.*
Художественный редактор *Л.В.Мухина.*

Н/К

ЛР № 040414 от 18.04.97.

Подписано в печать 3.06.96. Формат 84×108/32. Бумага офсетная.
Офсетная печать. Усл. печ. л. 32,2. Тираж 5000 экз.
Изд. № 6151. Заказ № 2383

Ордена "Знак Почета" издательство Московского университета
103009, Москва, Большая Никитская ул., 5/7

Издательство "ЧеРо"
Москва, Большой Власьевский пер., д. 11, к. 208
т. 241 3390, 938 2346

Великолукская городская типография Упрполиграфиздата Псковской области, 182100, г. Великие Луки, ул. Полиграфистов, 78/12

ISBN 5-211-03645-X

БОРИС ПАВЛОВИЧ ДЕМИДОВИЧ
(1906—1977)

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ
ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ФУНКЦИИ ОДНОЙ НЕЗАВИСИМОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

ОТДЕЛ I

ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

§ 1. Вещественные числа

1°. Метод математической индукции. Чтобы доказать, что некоторая теорема верна для всякого натурального числа n, достаточно доказать: 1) что эта теорема справедлива для $n = 1$ и 2) что если эта теорема справедлива для какого-нибудь натурального числа n, то она справедлива также и для следующего натурального числа $n + 1$.

2°. Сечение. Разбиение рациональных чисел на два класса A и B называется *сечением*, если выполнены следующие условия: 1) оба класса не пусты; 2) каждое рациональное число попадает в один и только в один класс и 3) любое число, принадлежащее классу A *(нижний класс)*, меньше произвольного числа, принадлежащего классу B *(верхний класс)*. Сечение A/B определяет: а) рациональное число, если или нижний класс A имеет наибольшее число или же верхний класс B имеет наименьшее число, и б) иррациональное число, если класс A не имеет наибольшего числа, а класс B — наименьшего числа. Числа рациональные и иррациональные носят название *вещественных* или *действительных* *).

3°. Абсолютная величина. Если x — вещественное число, то *абсолютной величиной* $|x|$ называется неотрицательное число, определяемое следующими условиями:

$$|x| = \begin{cases} -x, & \text{если } x < 0; \\ x, & \text{если } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Для любых вещественных чисел x и y имеет место неравенство

$$|x| - |y| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|.$$

4°. Верхняя и нижняя грани. Пусть $X = \{x\}$ — ограниченное множество вещественных чисел. Число

$$m = \inf \{x\}$$

называется *нижней гранью* множества X, если:

---

*) В дальнейшем под словом число мы будем понимать вещественное число, если не оговорено противное.

1) каждое $x \in X$ *) удовлетворяет неравенству

$$x \geqslant m;$$

2) каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует $x' \in X$ такое, что

$$x' < m + \varepsilon.$$

Аналогично число

$$M = \sup \{x\}$$

называется *верхней гранью* множества X, если:

1) каждое $x \in X$ удовлетворяет неравенству

$$x \leqslant M,$$

2) для любого $\varepsilon > 0$ существует $x'' \in X$ такое, что

$$x'' > M - \varepsilon.$$

Если множество X не ограничено снизу, то принято говорить, что

$$\inf \{x\} = -\infty;$$

если же множество X не ограничено сверху, то полагают

$$\sup \{x\} = +\infty.$$

5°. **Абсолютная и относительная погрешности.** Если a ($a \neq 0$) есть точное значение измеряемой величины, а x — приближенное значение этой величины, то

$$\Delta = |x - a|$$

называется *абсолютной погрешностью*, а

$$\delta = \frac{\Delta}{|a|}$$

— *относительной погрешностью* измеряемой величины.

Говорят, что число x имеет *n верных знаков*, если абсолютная погрешность этого числа не превышает половины единицы разряда, выражаемого n-й значащей цифрой.

Применяя метод математической индукции, доказать, что для любого натурального числа n справедливы следующие равенства:

1. $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

---

*) Запись $x \in X$ означает, что число x принадлежит множеству X.

2. $1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

3. $1^3+2^3+\ldots+n^3=(1+2+\ldots+n)^2$.

4. $1+2+2^2+\ldots+2^{n-1}=2^n-1$.

5. Пусть $a^{[n]}=a(a-h)\ldots[a-(n-1)h]$ и $a^{[0]}=1$.

Доказать, что $(a+b)^{[n]}=\sum_{m=0}^{n} C_n^m a^{[n-m]}b^{[m]}$, где C_n^m — число сочетаний из n элементов по m. Вывести отсюда формулу *бинома Ньютона*.

6. Доказать *неравенство Бернулли*:

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n)\geqslant 1+x_1+x_2+\ldots+x_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — числа одного и того же знака, бо́льшие -1.

7. Доказать, что если $x>-1$, то справедливо неравенство

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx \quad (n>1),$$

причем знак равенства имеет место лишь при $x=0$.

8. Доказать неравенство

$$n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n \text{ при } n>1.$$

Указание. Использовать неравенство

$$\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}>2 \quad (n=1, 2, \ldots).$$

9. Доказать неравенство

$$2!\cdot 4!\ldots(2n)!>[(n+1)!]^n \text{ при } n>1.$$

10. Доказать неравенство

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\ldots\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

10.1. Доказать неравенства:

а) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\sqrt{n}$ $(n\geqslant 2)$;

б) $n^{n+1}>(n+1)^n$ $(n\geqslant 3)$;

в) $\left|\sin\left(\sum_{k=1}^{n} x_k\right)\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sin x_k \quad (0 \leqslant x_k \leqslant \pi;$

$k = 1, 2, \ldots, n)$;

г) $(2n)! < 2^{2n}(n!)^2$.

11. Пусть c — положительное число, не являющееся точным квадратом целого числа, и A/B — сечение, определяющее вещественное число $\sqrt{c}$, где в класс B входят все положительные рациональные числа b такие, что $b^2 > c$, а в класс A — все остальные рациональные числа. Доказать, что в классе A нет наибольшего числа, а в классе B нет наименьшего числа.

12. Сечение A/B, определяющее число $\sqrt[3]{2}$, строится следующим образом: класс A содержит все рациональные числа a такие, что $a^3 < 2$; класс B содержит все остальные рациональные числа. Доказать, что в классе A нет наибольшего числа, а в классе B — наименьшего.

13. Построив соответствующие сечения, доказать равенства:

а) $\sqrt{2} + \sqrt{8} = \sqrt{18}$; б) $\sqrt{2}\,\sqrt{3} = \sqrt{6}$.

14. Построить сечение, определяющее число $2^{\sqrt{2}}$.

15. Доказать, что всякое непустое числовое множество, ограниченное снизу, имеет нижнюю грань, а всякое непустое числовое множество, ограниченное сверху, имеет верхнюю грань.

16. Показать, что множество всех правильных рациональных дробей m/n, где m и n — натуральные числа и $0 < m < n$, не имеет наименьшего и наибольшего элементов. Найти нижнюю и верхнюю грани этого множества.

17. Определить нижнюю и верхнюю грани множества рациональных чисел r, удовлетворяющих неравенству $r^2 < 2$.

18. Пусть $\{-x\}$ — множество чисел, противоположных числам $x \in \{x\}$. Доказать, что

а) $\inf\{-x\} = -\sup\{x\}$; б) $\sup\{-x\} = -\inf\{x\}$.

19. Пусть $\{x + y\}$ есть множество всех сумм $x + y$, где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$.

Доказать равенства:

а) $\inf\{x+y\} = \inf\{x\} + \inf\{y\}$;

б) $\sup\{x+y\} = \sup\{x\} + \sup\{y\}$.

20. Пусть $\{xy\}$ есть множество всех произведений xy, где $x \in \{x\}$ и $y \in \{y\}$, причем $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$.

Доказать равенства:

а) $\inf\{xy\} = \inf\{x\} \cdot \inf\{y\}$;

б) $\sup\{xy\} = \sup\{x\} \cdot \sup\{y\}$.

21. Доказать неравенства:

а) $|x-y| \geqslant ||x|-|y||$;

б) $|x+x_1+\ldots+x_n| \geqslant$

$$\geqslant |x| - (|x_1| + \ldots + |x_n|).$$

Решить неравенства:

22. $|x+1|<0{,}01$. 23. $|x-2| \geqslant 10$.

24. $|x|>|x+1|$. 25. $|2x-1|<|x-1|$.

26. $|x+2|+|x-2| \leqslant 12$. 27. $|x+2|-|x|>1$.

28. $||x+1|-|x-1||<1$. 29. $|x(1-x)|<0{,}05$.

30. Доказать тождество

$$\left(\frac{x+|x|}{2}\right)^2 + \left(\frac{x-|x|}{2}\right)^2 = x^2.$$

31. При измерении длины в 10 см абсолютная погрешность составляла 0,5 мм; при измерении расстояния в 500 км абсолютная погрешность была равна 200 м. Какое измерение точнее?

32. Определить, сколько верных знаков содержит число $x = 2{,}3752$, если относительная погрешность этого числа составляет 1 %?

33. Число $x = 12{,}125$ содержит 3 верных знака. Определить, какова относительная погрешность этого числа.

34. Стороны прямоугольника равны:

$$x = 2{,}50 \text{ см} \pm 0{,}01 \text{ см}, \quad y = 4{,}00 \text{ см} \pm 0{,}02 \text{ см}.$$

В каких границах заключается площадь S этого прямоугольника? Каковы абсолютная погрешность Δ и относительная погрешность δ площади прямоугольника, если за стороны его принять средние значения?

35. Вес тела $p = 12{,}59$ гс $\pm$ 0,01 гс, а его объем $v = 3{,}2$ см^3 $\pm$ 0,2 см^3. Определить удельный вес тела и оценить абсолютную и относительную погрешности удельного веса, если за вес тела и объем его принять средние значения.

36. Радиус круга $r = 7{,}2$ м $\pm$ 0,1 м. С какой минимальной относительной погрешностью может быть определена площадь круга, если принять $\pi = 3{,}14$?

37. Измерения прямоугольного параллелепипеда суть:

$$x = 24{,}7 \text{ м} \pm 0{,}2 \text{ м},$$
$$y = 6{,}5 \text{ м} \pm 0{,}1 \text{ м},$$
$$z = 1{,}2 \text{ м} \pm 0{,}1 \text{ м}.$$

В каких границах заключается объем v этого параллелепипеда? С какими абсолютной и относительной погрешностями может быть определен объем этого параллелепипеда, если за его измерения принять средние значения?

38. С какой абсолютной погрешностью следует измерить сторону квадрата x, где 2 м $< x <$ 3 м, чтобы иметь возможность определить площадь этого квадрата с точностью до 0,001 м^2?

39. С какими абсолютными погрешностями Δ достаточно измерить стороны x и y прямоугольника, чтобы площадь его можно было вычислить с точностью до 0,01 м^2, если ориентировочно стороны прямоугольника не превышают 10 м каждая?

40. Пусть $\delta(x)$ и $\delta(y)$ — относительные погрешности чисел x и y, $\delta(xy)$ — относительная погрешность числа xy.

Доказать, что $\delta(xy) \leqslant \delta(x) + \delta(y) + \delta(x)\delta(y)$.

§ 2. Теория последовательностей

1°. **Понятие предела последовательности.** Говорят, что последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, или иначе x_n ($n = 1, 2, \ldots$), имеет своим пределом число a (короче, *сходится* к a), т. е.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ при } n > N.$$

В частности, x_n называется *бесконечно малой*, если

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

Последовательность, не имеющая предела, называется *расходящейся*.

2°. Признаки существования предела.

1) Если

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$$

и

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} z_n = c,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = c.$$

2) Монотонная и ограниченная последовательность имеет предел.

3) Критерий Коши. Для существования предела последовательности x_n необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon,$$

если только $n > N$ и $p > 0$.

3°. Основные теоремы о пределах последовательностей. Предполагая, что существуют

$$\lim_{n\to\infty} x_n \text{ и } \lim_{n\to\infty} y_n,$$

имеем:

1) если $x_n \leqslant y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

2) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$, если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$.

4°. Число e. Последовательность

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

имеет конечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e = 2{,}718\,281\,8284\ldots$$

5°. Бесконечный предел. Символическая запись

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

обозначает, что, каково бы ни было $E > 0$, существует число $N = N(E)$ такое, что

$$|x_n| > E \text{ при } n > N.$$

6°. Предельная точка. Число ξ (или символ ∞) называется *частичным пределом* (*предельной точкой*) данной последовательности x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, если существует ее подпоследовательность

$$x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_n}, \ldots \qquad (1 \leqslant p_1 < p_2 < \ldots)$$

такая, что

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \xi.$$

Всякая ограниченная последовательность имеет по меньшей мере один конечный частичный предел (*принцип Больцано — Вейерштрасса*). Если этот частичный предел единственный, то он же является конечным пределом данной последовательности.

Наименьший частичный предел (конечный или бесконечный) последовательности x_n

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n$$

называется *нижним пределом*, а наибольший частичный предел ее

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

называется *верхним пределом* этой последовательности.

Равенство

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n = \varlimsup_{n\to\infty} x_n$$

является необходимым и достаточным условием существования предела (конечного или бесконечного) последовательности x_n.

41. Пусть

$$x_n = \frac{n}{n+1} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1,$$

определив для каждого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что

$$|x_n - 1| < \varepsilon, \text{ если } n > N.$$

Заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
N					

42. Доказать, что x_n ($n = 1, 2, \ldots$) есть *бесконечно малая* (т. е. имеет предел, равный 0), указав для всякого $\varepsilon > 0$ число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|x_n| < \varepsilon$ при $n > N$, если

а) $x_n = \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}$; б) $x_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$;

в) $x_n = \dfrac{1}{n!}$; г) $x_n = (-1)^n \cdot 0{,}999^n$.

Для каждого из этих случаев заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,001	0,0001	...
N				

43. Доказать, что последовательности

а) $x_n = (-1)^n n$, б) $x_n = 2^{\sqrt{n}}$, в) $x_n = \lg(\lg n)$ $(n \geqslant 2)$

имеют бесконечный предел при $n \to \infty$ (т. е. являются *бесконечно большими*), определив для всякого $E > 0$ число $N = N(E)$ такое, что $|x_n| > E$ при $n > N$.

Для каждого из этих случаев заполнить следующую таблицу:

E	10	100	1 000	10 000	...
N					

44. Показать, что $x_n = n^{(-1)^n}$ ($n = 1, 2, \ldots$) не ограничена, однако не является бесконечно большой при $n \to \infty$.

45. Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения:

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$; в) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$.

Предполагая, что n пробегает натуральный ряд чисел, определить значения следующих выражений:

46. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{10\,000n}{n^2+1}$. **47.** $\lim\limits_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$.

48. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}\sin n!}{n+1}$. **49.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

50. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+a+a^2+\ldots+a^n}{1+b+b^2+\ldots+b^n}$ $(|a|<1,\ |b|<1)$.

51. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\ldots+\frac{n-1}{n^2}\right)$.

52. $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n}-\frac{2}{n}+\frac{3}{n}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}n}{n}\right|$.

53. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\ldots+\frac{(n-1)^2}{n^3}\right]$.

54. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\ldots+\frac{(2n-1)^2}{n^3}\right]$.

55. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\ldots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$.

56. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$.

57. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{2}\,\sqrt[4]{2}\,\sqrt[8]{2}\,\ldots\,\sqrt[2^n]{2}\right)$.

Доказать следующие равенства:

58. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n}=0$. **59.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!}=0$.

60. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{a^n}=0$ $(a>1)$. **61.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n!}=0$.

62. $\lim\limits_{n\to\infty} nq^n=0$, если $|q|<1$.

63. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}=1$ $(a>0)$. **64.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\log_a n}{n}=0$ $(a>1)$.

65. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}=1$. **66.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=0$.

67. Какое выражение больше при достаточно больших n:

а) $100n + 200$ или $0{,}01n^2$?; б) 2^n или n^{1000}?;
в) 1000^n или $n!$?

68. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)=0.$$

Указание. См. пример 10.

69. Доказать, что последовательность

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

монотонно возрастает и ограничена сверху, а последовательность

$$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

монотонно убывает и ограничена снизу. Отсюда вывести, что эти последовательности имеют общий предел

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=e.$$

Указание. Составить отношения $\frac{x_{n+1}}{x_n}$, $\frac{y_n}{y_{n-1}}$ и воспользоваться неравенством примера 7.

70. Доказать, что

$$0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{3}{n} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

При каких значениях показателя n выражение $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ будет отличаться от числа e меньше чем на 0,001?

71. Пусть $p_n/(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к $+\infty$, и q_n $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ — произвольная последовательность чисел, стремящаяся к $-\infty$ $(p_n,\ q_n \notin [-1,\ 0])$. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{p_n}\right)^{p_n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{q_n}\right)^{q_n}=e.$$

72. Зная, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$, доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e.$$

Вывести отсюда формулу

$$e=2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\ldots+\frac{1}{n!}+\frac{\theta_n}{n!n}, \qquad (*)$$

где $0<\theta_n<1$, и вычислить число e с точностью до 10^{-5}.

73. Доказать, что число e иррационально.

74. Доказать неравенство

$$\left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n.$$

75. Доказать неравенства:

а) $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$,

где n — любое натуральное число;

б) $1+\alpha<e^{\alpha}$,

где α — вещественное число, отличное от нуля.

76. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} n\,(a^{1/n}-1)=\ln a \quad (a>0)$, где $\ln a$ есть логарифм числа a при основании $e=2,718\ldots$

Пользуясь теоремой о существовании предела монотонной и ограниченной последовательности, доказать сходимость следующих последовательностей:

77. $x_n=p_0+\frac{p_1}{10}+\ldots+\frac{p_n}{10^n} \quad (n=1,\ 2,\ \ldots)$,

где p_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ — целые неотрицательные числа, не превышающие 9, начиная с p_1.

78. $x_n=\frac{10}{1}\cdot\frac{11}{3}\ \ldots\ \frac{n+9}{2n-1}$.

79. $x_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

80. $x_n=\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{2^n}\right)$.

81. $x_1=\sqrt{2}$, $\quad x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\ldots$, $x_n=$

$$=\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}}_{n\ \text{корней}}, \ \ldots$$

Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость следующих последовательностей:

82. $x_n = a_0 + a_1 q + \ldots + a_n q^n$,

где $|a_k| < M$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ и $|q| < 1$.

83. $x_n = \dfrac{\sin 1}{2} + \dfrac{\sin 2}{2^2} + \ldots + \dfrac{\sin n}{2^n}$.

84. $x_n = \dfrac{\cos 1!}{1\cdot 2} + \dfrac{\cos 2!}{2\cdot 3} + \ldots + \dfrac{\cos n!}{n(n+1)}$.

85. $x_n = 1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2}$.

Указание. Воспользоваться неравенством

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

86. Говорят, что последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ имеет *ограниченное изменение*, если существует число C такое, что

$$|x_2 - x_1| + |x_3 - x_2| + \ldots + |x_n - x_{n-1}| < C$$
$$(n = 2, 3, \ldots).$$

Доказать, что последовательность с ограниченным изменением сходится.

Построить пример сходящейся последовательности, не имеющей ограниченного изменения.

87. Сформулировать, что значит, что для данной последовательности не выполнен критерий Коши.

88. Пользуясь критерием Коши, доказать расходимость последовательности

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

89. Доказать, что если последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится, то любая ее подпоследовательность x_{p_n} также сходится и имеет тот же самый предел:

$$\lim_{n\to\infty} x_{p_n} = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

90. Доказать, что монотонная последовательность будет сходящейся, если сходится некоторая ее подпоследовательность.

91. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, то

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |a|.$$

92. Если $x_n \to a$, то что можно сказать о пределе

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n}?$$

93. Доказать, что сходящаяся числовая последовательность ограничена.

94. Доказать, что сходящаяся числовая последовательность достигает либо своей верхней грани, либо своей нижней грани, либо той и другой. Построить примеры последовательностей всех трех типов.

95. Доказать, что числовая последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, стремящаяся к $+\infty$, обязательно достигает своей нижней грани.

Найти наибольший член последовательности x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, если:

96. $x_n = \dfrac{n^2}{2^n}$. **97.** $x_n = \dfrac{\sqrt{n}}{100+n}$. **98.** $x_n = \dfrac{1000^n}{n!}$.

Найти наименьший член последовательности x_n $(n = 1, 2, \ldots)$, если:

99. $x_n = n^2 - 9n - 100$. **100.** $x_n = n + \dfrac{100}{n}$.

Для последовательности x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ найти $\inf x_n$, $\sup x_n$, $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

101. $x_n = 1 - \dfrac{1}{n}$. **101.1.** $x_n = (-1)^{n-1}\left(2 + \dfrac{3}{n}\right)$.

102. $x_n = \dfrac{(-1)^n}{n} + \dfrac{1+(-1)^n}{2}$.

103. $x_n = 1 + \dfrac{n}{n+1}\cos\dfrac{n\pi}{2}$.

104. $x_n = 1 + 2(-1)^{n+1} + 3\cdot(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

105. $x_n = \dfrac{n-1}{n+1}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$. **106.** $x_n = (-1)^n n$.

107. $x_n = -n[2+(-1)^n]$. **108.** $x_n = n^{(-1)^n}$.

109. $x_n = 1 + n\sin\dfrac{n\pi}{2}$. **110.** $x_n = \dfrac{1}{n-10{,}2}$.

Найти $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n$ и $\varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n$, если:

111. $x_n = \dfrac{n^2}{1+n}\cos\dfrac{2n\pi}{3}$.

112. $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\cdot(-1)^n + \sin\dfrac{n\pi}{4}$.

113. $x_n = \dfrac{n}{n+1}\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$.

114. $x_n = \sqrt[n]{1+2^{n\cdot(-1)^n}}$. **115.** $x_n = \cos^n\dfrac{2n\pi}{3}$.

Найти частичные пределы следующих последовательностей:

116. $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{8},\ \dfrac{7}{8},\ \ldots,\ \dfrac{1}{2^n},\ \dfrac{2^n-1}{2^n},\ \ldots$

117. $1,\ \dfrac{1}{2},\ 1+\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ 1+\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{4},\ 1+\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{5},\ \ldots$
$\ldots,\dfrac{1}{n},\ 1+\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n},\ \ldots,\ \dfrac{1}{n-1}+\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n+1},\ \ldots$

118. $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{2}{5},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5},\ \ldots$

119. $x_n = 3\cdot\left(1-\dfrac{1}{n}\right)+2(-1)^n$.

120. $x_n = \dfrac{1}{2}\left[(a+b)+(-1)^n(a-b)\right]$.

121. Построить пример числовой последовательности, имеющей в качестве своих частичных пределов данные числа

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_p.$$

122. Построить пример числовой последовательности, для которой все члены данной числовой последовательности

$$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$$

являются ее частичными пределами. Какие еще частичные пределы обязательно имеет построенная последовательность?

123. Построить пример последовательности:

а) не имеющей конечных частичных пределов;

б) имеющей единственный конечный частичный предел, но не являющейся сходящейся;

в) имеющей бесконечное множество частичных пределов;

г) имеющей в качестве своего частичного предела каждое вещественное число.

124. Доказать, что последовательности x_n и $y_n = x_n\sqrt[n]{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ имеют одни и те же частичные пределы.

125. Доказать, что из ограниченной последовательности x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ всегда можно выделить сходящуюся подпоследовательность x_{p_n} $(n = 1, 2, \ldots)$.

126. Доказать, что если последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ не ограничена, то существует подпоследовательность x_{p_n} такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_{p_n} = \infty$.

127. Пусть последовательность x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится, а последовательность y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ расходится. Что можно утверждать о сходимости последовательностей:

а) $x_n + y_n$; б) $x_n y_n$?

Привести соответствующие примеры.

128. Пусть последовательности x_n и y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ расходятся. Можно ли утверждать, что последовательности

а) $x_n + y_n$; б) $x_n y_n$

также расходятся? Привести соответствующие примеры.

129. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, и y_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — произвольная последовательность. Можно ли утверждать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$? Привести соответствующие примеры.

130. Пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

Следует ли отсюда, что либо $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, либо $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$?

Рассмотреть пример: $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, $y_n = \dfrac{1-(-1)^n}{2}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$.

131. Доказать, что

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$

и

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n.$

Построить примеры, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

132. Пусть $x_n \geqslant 0$ и $y_n \geqslant 0$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$. Доказать, что

а) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$

и

б) $\varliminf\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) \leqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n.$

Построить примеры, когда в этих соотношениях имеют место строгие неравенства.

133. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует, то, какова бы ни была последовательность y_n $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, имеем:

а) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$

и

б) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n \qquad (x_n \geqslant 0).$

134. Доказать, что если для некоторой последовательности x_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, какова бы ни была последовательность y_n $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$, имеет место по меньшей мере одно из равенств:

а) $\varlimsup\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} x_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} y_n$

или

б) $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n y_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,y_n \quad (x_n\geqslant 0),$

то последовательность x_n — сходящаяся.

135. Доказать, что если $x_n>0$ $(n=1, 2, \ldots)$ и

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{1}{x_n}=1,$$

то последовательность x_n — сходящаяся.*

136. Доказать, что если последовательность x_n $(n=1, 2, \ldots)$ ограничена и $\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=0$, то частичные пределы этой последовательности расположены всюду плотно между ее нижним и верхним пределами:

$$l=\underline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n \quad \text{и} \quad L=\overline{\lim_{n\to\infty}}\,x_n,$$

то есть любое число из отрезка $[l, L]$ является частичным пределом данной последовательности.

137. Пусть числовая последовательность $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ удовлетворяет условию

$$0\leqslant x_{m+n}\leqslant x_m+x_n \quad (m, n=1, 2, \ldots).$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{n}$ существует.

138. Доказать, что если последовательность x_n $(n=1, 2, \ldots)$ сходится, то последовательность средних арифметических

$$\xi_n=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n) \qquad (n=1, 2, \ldots)$$

также сходится и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

Обратное утверждение неверно: построить пример.

139. Доказать, что если $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, то

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n}=+\infty.$$

140. Доказать, что если последовательность x_n $(n=1, 2, \ldots)$ сходится и $x_n>0$, то

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

141. Доказать, что если $x_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n},$$

предполагая, что предел, стоящий в правой части последнего равенства, существует.

142. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

143. Доказать теорему Штольца: если

а) $y_{n+1} > y_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty$, в) существует $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}$,

то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}.$$

144. Найти:

а) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n^2}{a^n}$ $(a > 1)$; б) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\lg n}{n}$.

145. Доказать, что если p — натуральное число, то

а) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^p} - \dfrac{n}{p+1} \right) = \dfrac{1}{2}$,

в) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 3^p + \ldots + (2n-1)^p}{n^{p+1}} = \dfrac{2^p}{p+1}$

146. Доказать, что последовательность

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

сходится.

Таким образом, имеет место формула

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = C + \ln n + \varepsilon_n,$$

где $C = 0{,}577216\ldots$ — так называемая *постоянная Эйлера* и $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

147. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{2n} \right)$.

148. Последовательность чисел x_n ($n = 1, 2, \ldots$) определяется следующими формулами:

$$x_1 = a, \quad x_2 = b, \qquad x_n = \frac{x_{n-1} + x_{n-2}}{2} \quad (n = 3, 4, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

149 (н). Пусть x_n ($n = 1, 2, \ldots$) — последовательность чисел, определяемая следующей формулой:

$$x_0 > 0, \quad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{1}{x_n}\right) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$.

150. Доказать, что последовательности x_n и y_n ($n = 1, 2, \ldots$), определяемые следующими формулами:

$$x_1 = a, \quad y_1 = b, \quad x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2},$$

имеют общий предел

$$\mu(a, b) = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n$$

(*арифметико-геометрическое среднее* чисел a и b).

§ 3. Понятие функции

1°. Понятие функции. Переменная y называется однозначной функцией f от переменной x в данной области изменения $X = \{x\}$, если каждому значению $x \in X$ ставится в соответствие одно определенное действительное значение $y = f(x)$, принадлежащее некоторому множеству $Y = \{y\}$.

Множество X носит название *области определения* или *области существования* функции $f(x)$; Y называется *множеством значений* этой функции.

В простейших случаях множество X представляет собой или *открытый промежуток* (*интервал*) $]a, b[= (a, b)$: $a < x < b$ или *полуоткрытые промежутки*

$$]a, b] = (a, b]: a < x \leqslant b, \quad [a, b[= [a, b): a \leqslant x < b,$$

или *замкнутый промежуток* (*сегмент*) $[a, b]$: $a \leqslant x \leqslant b$, где a и b — некоторые вещественные числа или символы $-\infty$ и $+\infty$ (в последних случаях равенства исключаются). Если каждому значению x из X соответствует одно или несколько значений $y = f(x)$, то y называется *многозначной функцией* от x.

2°. Обратная функция. Если под x понимать любое значение, удовлетворяющее уравнению

$$f(x) = y,$$

где y — фиксированное число, принадлежащее множеству значений Y функции $f(x)$, то это соответствие определяет на множестве Y некоторую, вообще говоря, многозначную функцию

$$x = f^{-1}(y),$$

называемую *обратной* по отношению к функции $f(x)$. Если функция $y = f(x)$ монотонна в строгом смысле, т. е. $f(x_2) > f(x_1)$ (или соответственно $f(x_2) < f(x_1)$) при $x_2 > x_1$, то обратная функция $x = f^{-1}(y)$ является однозначной и монотонной в том же смысле.

Определить области существования следующих функций:

151. $y = \dfrac{x^2}{1+x}$. **152.** $y = \sqrt{3x - x^3}$.

153. $y = (x-2)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

154. а) $y = \log(x^2 - 4)$; б) $y = \log(x+2) + \log(x-2)$.

155. $y = \sqrt{\sin(\sqrt{x})}$. **156.** $y = \sqrt{\cos x^2}$.

157. $y = \lg\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$. **158.** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$.

159. $y = \arcsin\dfrac{2x}{1+x}$ **160.** $y = \arccos(2\sin x)$.

161. $y = \lg[\cos(\lg x)]$. **162(н).** $y = (x + |x|)\sqrt{x\sin^2 \pi x}$.

163. $y = \operatorname{ctg} \pi x + \arccos(2^x)$.

164. $y = \arcsin(1-x) + \lg(\lg x)$. **165.** $y = (2x)!$

165.1. $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$. **165.2.** $y = \sqrt[4]{\lg \operatorname{tg} x}$.

165.3. $y = \sqrt{\sin 2x} + \sqrt{\sin 3x}$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

Определить области существования и множество значений следующих функций:

166. $y = \sqrt{2 + x - x^2}$. **167.** $y = \lg(1 - 2\cos x)$.

168. $y = \arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$. **169.** $y = \arcsin\left(\lg\dfrac{x}{10}\right)$.

170. $y = (-1)^x$.

171. В треугольник ABC (рис. 1), основание которого $AC = b$ и высота $BD = h$, вписан прямоугольник $KLMN$, высота которого $NM = x$. Выразить периметр

P прямоугольника $KLMN$ и его площадь S как функции от x.

Построить графики функций $P = P(x)$ и $S = S(x)$.

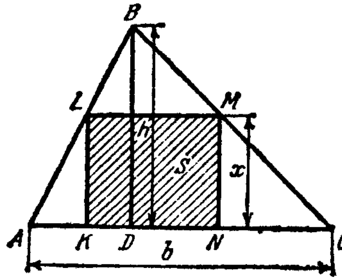

Рис. 1

172. В треугольнике ABC сторона $AB = 6$ см, сторона $AC = 8$ см и угол $BAC = x$. Выразить $BC = a$ и площадь $ABC = S$ как функции переменной x. Построить графики функций $a = a(x)$ и $S = S(x)$.

173. В равнобедренной трапеции $ABCD$ (рис. 2), основания которой $AD = a$ и $BC = b$ $(a > b)$, а высота $HB = h$, проведена прямая $MN \parallel HB$ и отстоящая от

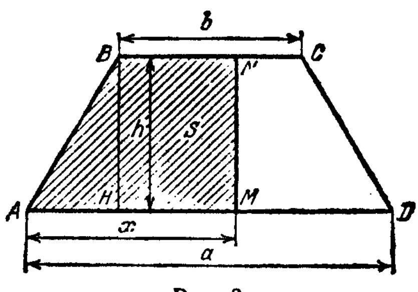

Рис. 2

вершины A на расстоянии $AM = x$. Выразить площадь S фигуры $ABNMA$ как функцию переменной x. Построить график функции: $S = S(x)$.

174. На сегменте $0 \leqslant x \leqslant 1$ оси Ox равномерно распределена масса, равная 2 г, а в точках этой оси $x = 2$ и $x = 3$ находятся сосредоточенные массы по 1 г в каждой. Составить аналитическое выражение функции $m = m(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, численно равной массе, находящейся в интервале $(-\infty, x)$, и построить график этой функции.

175. Функция $y = \operatorname{sgn} x$ определяется следующим образом:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, \text{ если } x<0; \\ 0, \text{ если } x=0; \\ 1, \text{ если } x>0. \end{cases}$$

Построить график этой функции. Показать, что

$$|x| = x \operatorname{sgn} x.$$

176. Функция $y = [x]$ (*целая часть* числа x) определяется следующим образом: если $x = n + r$, где n — целое число и $0 \leqslant r < 1$, то $[x] = n$.

Построить график этой функции.

177. Пусть

$$y = \pi(x) \quad (x \geqslant 0)$$

обозначает число простых чисел, не превышающих числа x. Построить график этой функции для значений аргумента $0 \leqslant x \leqslant 20$.

На какое множество E_y отображает множество E_x функция $y = f(x)$, если:

178(н). $y = x^2$, $\quad E_x = \{-1 \leqslant x \leqslant 2\}$.

179. $y = \lg x$, $\quad E_x = \{10 < x < 1000\}$.

180. $y = \dfrac{1}{\pi} \operatorname{arctg} x$, $\quad E_x = \{-\infty < x < +\infty\}$.

181. $y = \operatorname{ctg} \dfrac{\pi x}{4}$, $\quad E_x = \{0 < |x| \leqslant 1\}$.

182. $y = |x|$, $\quad E_x = \{1 \leqslant |x| \leqslant 2\}$.

Переменная x пробегает интервал $0 < x < 1$. Какое множество пробегает переменная y, если:

183. $y = a + (b - a)x$. $\quad$ 184. $y = \dfrac{1}{1-x}$.

185. $y = \dfrac{x}{2x-1}$. $\quad$ 186. $y = \sqrt{x - x^2}$.

187. $y = \operatorname{ctg} \pi x$. $\quad$ 188. $y = x + [2x]$.

189. Найти $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, если $f(x) = x^4-6x^3+11x^2-6x$.

190. Найти $f(-1)$, $f(-0{,}001)$, $f(100)$, если $f(x) = \lg(x^2)$.

191. Найти $f(0{,}9)$, $f(0{,}99)$, $f(0{,}999)$, $f(1)$, если $f(x) = 1+[x]$.

192. Найти $f(-2)$, $f(-1)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, если

$$f(x)=\begin{cases} 1+x & \text{при} \quad -\infty<x\leqslant 0,\\ 2^x & \text{при} \quad 0<x<+\infty.\end{cases}$$

193. Найти $f(0)$, $f(-x)$, $f(x+1)$, $f(x)+1$, $f\left(\frac{1}{x}\right)$, $\frac{1}{f(x)}$, если

$$f(x)=\frac{1-x}{1+x}.$$

194. Найти значения x, для которых: 1) $f(x)=0$; 2) $f(x)>0$; 3) $f(x)<0$, если:

а) $f(x)=x-x^3$; б) $f(x)=\sin\frac{\pi}{x}$;

в) $f(x)=(x+|x|)(1-x)$.

195. Найти $\varphi(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, если:

а) $f(x)=ax+b$; б) $f(x)=x^2$; в) $f(x)=a^x$.

196. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. Показать, что

$$f(x+3)-3f(x+2)+3f(x+1)-f(x)\equiv 0$$

197. Найти целую линейную функцию $f(x)=ax+b$, если $f(0)=-2$ и $f(3)=5$.

Чему равны $f(1)$ и $f(2)$ (*линейная интерполяция*)?

198. Найти целую рациональную функцию второй степени: $f(x)=ax^2+bx+c$, если

$$f(-2)=0,\ f(0)=1,\ f(1)=5.$$

Чему равны $f(-1)$ и $f(0{,}5)$ (*квадратичная интерполяция*)?

199. Найти целую рациональную функцию третьей степени:

$$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d,$$

если $f(-1)=0$, $f(0)=2$, $f(1)=-3$, $f(2)=5$.

200. Найти функцию вида $f(x) = a + bc^x$, если $f(0) = 15$, $f(2) = 30$, $f(4) = 90$.

201. Доказать, что если для линейной функции

$$f(x) = ax + b$$

значения аргумента $x = x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют арифметическую прогрессию, то соответствующие значения функции $y_n = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют также арифметическую прогрессию.

202. Доказать, что если для показательной функции

$$f(x) = a^x \quad (a > 0)$$

значения аргумента $x = x_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют арифметическую прогрессию, то соответствующие значения функции $y_n = f(x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ образуют геометрическую прогрессию).

203. Пусть функция $f(u)$ определена при $0 < u < 1$. Найти области определения функций:

а) $f(\sin x)$; б) $f(\ln x)$; в) $f\left(\frac{[x]}{x}\right)$.

204. Пусть $f(x) = \frac{1}{2}(a^x + a^{-x})$ $(a > 0)$. Показать, что

$$f(x + y) + f(x - y) = 2f(x)\,f(y).$$

205. Пусть $f(x) + f(y) = f(z)$. Определить z, если

а) $f(x) = ax$; б) $f(x) = \frac{1}{x}$;

в) $f(x) = \operatorname{arctg} x$ $(|x| < 1)$; г) $f(x) = \log\frac{1+x}{1-x}$.

Найти $\varphi[\varphi(x)]$, $\psi[\psi(x)]$, $\varphi[\psi(x)]$ и $\psi[\varphi(x)]$, если:

206. $\varphi(x) = x^2$ и $\psi(x) = 2^x$.

207. $\varphi(x) = \operatorname{sgn} x$ и $\psi(x) = \frac{1}{x}$.

208. $\varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ x & \text{при } x > 0 \end{cases}$ и $\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 0, \\ -x^2 & \text{при } x > 0. \end{cases}$

209. Найти $f[f(x)]$, $f\{f[f(x)]\}$, если

$$f(x)=\frac{1}{1-x}.$$

210. Пусть $f_n(x)=\underbrace{f(f(\ldots f(x)))}_{n \text{ раз}}$. Найти $f_n(x)$, если
$f(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

211. Найти $f(x)$, если $f(x+1)=x^2-3x+2$.

212. Найти $f(x)$, если $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$ $(|x|\geqslant 2)$.

213. Найти $f(x)$, если $f\left(\frac{1}{x}\right)=x+\sqrt{1+x^2}$ $(x>0)$.

213.1. Найти $f(x)$, если $f\left(\frac{x}{x+1}\right)=x^2$.

Доказать, что следующие функции являются монотонно возрастающими в указанных промежутках:

214. $f(x)=x^2$ $(0\leqslant x<+\infty)$.

215. $f(x)=\sin x$ $\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$.

216. $f(x)=\operatorname{tg} x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$.

217. $f(x)=2x+\sin x$ $(-\infty<x<+\infty)$.

Доказать, что следующие функции являются монотонно убывающими в указанных промежутках:

218. $f(x)=x^2$ $(-\infty<x\leqslant 0)$.

219. $f(x)=\cos x$ $(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

220. $f(x)=\operatorname{ctg} x$ $(0<x<\pi)$.

221. Исследовать на монотонность следующие функции:

а) $f(x)=ax+b$; б) $f(x)=ax^2+bx+c$;

в) $f(x)=x^3$; г) $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$;

д) $f(x)=a^x$ $(a>0)$.

222. Можно ли почленно логарифмировать неравенство?

223. Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x)$ — монотонно возрастающие функции. Доказать, что если

$$\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x),$$

то

$$\varphi[\varphi(x)] \leqslant f[f(x)] \leqslant \psi[\psi(x)].$$

Определить обратную функцию $x = \varphi(y)$ и ее область существования, если:

224. $y = 2x + 3 \quad (-\infty < x < +\infty)$.

225. $y = x^2$; а) $-\infty < x \leqslant 0$; б) $0 \leqslant x < +\infty$.

226. $y = \dfrac{1-x}{1+x} \quad (x \neq -1)$.

227. $y = \sqrt{1-x^2}$; а) $-1 \leqslant x \leqslant 0$; б) $0 \leqslant x \leqslant 1$

228. $y = \operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ $(-\infty < x < +\infty)$.

229. $y = \operatorname{th} x$, где $\operatorname{th} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ $(-\infty < x < +\infty)$.

230.

$$y = \begin{cases} x, & \text{если } -\infty < x < 1; \\ x^2, & \text{если } 1 \leqslant x \leqslant 4; \\ 2^x, & \text{если } 4 < x < +\infty. \end{cases}$$

231. Функция $f(x)$, определенная в симметричном интервале $(-l, l)$, называется *четной*, если

$$f(-x) \equiv f(x);$$

и *нечетной*, если

$$f(-x) \equiv -f(x).$$

Определить, какие из данных функций $f(x)$ являются четными, а какие нечетными:

а) $f(x) = 3x - x^3$; б) $f(x) = \sqrt[3]{(1-x)^2} + \sqrt[3]{(1+x)^2}$;

в) $f(x)=a^x+a^{-x}$ $(a>0)$; г) $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$;

д) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

232. Доказать, что всякую функцию $f(x)$, определенную в симметричном интервале $(-l, l)$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

233. Функция $f(x)$, определенная на множестве E, называется периодической, если существует число $T>0$ (период функции — в широком смысле слова!) такое, что

$$f(x\pm T)\equiv f(x) \text{ при } x\in E.$$

Выяснить, какие из данных функций являются периодическими, и определить наименьший период их, если:

а) $f(x)=A\cos\lambda x+B\sin\lambda x$;

б) $f(x)=\sin x+\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{3}\sin 3x$;

в) $f(x)=2\operatorname{tg}\frac{x}{2}-3\operatorname{tg}\frac{x}{3}$; г) $f(x)=\sin^2 x$;

д) $f(x)=\sin x^2$; е) $f(x)=\sqrt{\operatorname{tg} x}$;

ж) $f(x)=\operatorname{tg}\sqrt{x}$; з) $f(x)=\sin x+\sin\left(x\sqrt{2}\right)$.

234. Доказать, что для функции Дирихле

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x \text{ рационально},\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально},\end{cases}$$

периодом является любое рациональное число.

235. Доказать, что сумма и произведение двух периодических функций, которые определены на общем множестве и периоды которых соизмеримы, есть функции также периодические.

235.1. Функция $f(x)$ называется *антипериодической*, если

$$f(x+T)\equiv -f(x) \quad (T>0).$$

Доказать, что $f(x)$ — периодическая с периодом $2T$.

236. Доказать, что если для функции $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ выполнено равенство $f(x+T)=kf(x)$, где k и T — положительные постоянные, то $f(x)=a^x\varphi(x)$, где a — постоянная, а $\varphi(x)$ — периодическая функция с периодом T.

§ 4. Графическое изображение функции

1°. Для построения графика функции $y = f(x)$ поступают следующим образом: 1) определяют область существования функции: $X = \{x\}$; 2) выбирают достаточно густую сеть значений аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из X и составляют таблицу соответствующих значений функции

$$y_i = f(x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

3) наносят систему точек $M_i(x_i, y_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ на координатную плоскость Oxy и соединяют их линией, характер которой учитывает положение промежуточных точек.

2°. Чтобы получить грамотный график функции, следует изучить общие свойства этой функции.

В первую очередь нужно: 1) решив уравнение $f(x) = 0$, определить точки пересечения графика функции с осью Ox (*нули функции*); 2) установить области изменения аргумента, где функция положительна или отрицательна; 3) если возможно, выяснить *промежутки монотонности* (возрастания или убывания) функции; 4) изучить поведение функции при неограниченном приближении аргумента к граничным точкам области существования функции.

В этом параграфе предполагается, что свойства простейших элементарных функций — степенной, показательной, тригонометрических и т. п., известны читателю.

Пользуясь этими свойствами, можно, не проделывая большой вычислительной работы, сразу рисовать эскизы графиков многих функций. Другие графики иногда удается свести к комбинации (сумме или произведению и т. п.) этих простейших графиков.

237. Построить график линейной однородной функции

$$y = ax$$

при $a = 0;\ 1/2;\ 1;\ 2;\ -1$.

238. Построить график линейной функции

$$y = x + b$$

при $b = 0,\ 1,\ 2,\ -1$.

239. Построить графики линейных функций:

а) $y = 2x + 3$; б) $y = 2 - 0{,}1x$; $y = -\frac{x}{2} - 1$.

240. Температурный коэффициент линейного расширения железа $a = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$. Построить в подходящем масштабе график функции

$$l = f(T) \quad (-40° \leqslant T \leqslant 100°),$$

где T — температура в градусах и l — длина железного стержня при температуре T, если $l = 100$ см при $T = 0°$.

241. На числовой оси движутся две материальные точки. Первая в начальный момент времени $t=0$ находилась на 20 м влево от начала координат и имела скорость $v_1 = 10$ м/с; вторая при $t=0$ находилась на 30 м вправо от точки O и имела скорость $v_2 = -20$ м/с. Построить графики уравнений движений этих точек и найти время и место их встречи.

242. Построить графики целых рациональных функций 2-й степени (*параболы*):

а) $y=ax^2$ при $a=1,\ 1/2,\ 2,\ -1$;

б) $y=(x-x_0)^2$ при $x_0=0,\ 1,\ 2,\ -1$;

в) $y=x^2+c$ при $c=0,\ 1,\ 2,\ -1$.

243. Построить график *квадратного трехчлена*

$$y = ax^2 + bc + c,$$

приведя его к виду

$$y = y_0 + a(x-x_0)^2.$$

Рассмотреть примеры:

а) $y=8x-2x^2$; б) $y=x^2-3x+2$;

в) $y=-x^2+2x-1$; г) $y=\frac{1}{2}x^2+x+1$.

244. Материальная точка брошена под углом $\alpha = 45°$ к плоскости горизонта с начальной скоростью $v_0 = 600$ м/с. Построить график траектории движения и найти наибольшую высоту подъема и дальность полета (приближенно считать $g \approx 10$ м/с^2; сопротивлением воздуха пренебречь).

Построить графики целых рациональных функций степени выше второй:

245. $y=x^3+1$. **246.** $y=(1-x^2)(2+x)$.

247. $y=x^2-x^4$. **248.** $y=x(a-x)^2(a+x)^3$ $(a>0)$.

Построить графики дробно-линейных функций (*гиперболы*):

249. $y=\frac{1}{x}$. **250.** $y=\frac{1-x}{1+x}$.

251. Построить график дробно-линейной функции

$$y=\frac{ax+b}{cx+d} \qquad (ad-bc\neq 0,\quad c\neq 0),$$

приведя ее к виду

$$y = y_0 + \frac{m}{x - x_0}.$$

Рассмотреть пример $y = \dfrac{3x+2}{2x-3}$.

252. Газ при давлении $p_0 = 1$ кгс/м^2 занимает объем $v_0 = 12$ м^3. Построить график изменения объема v газа в зависимости от давления p, если температура газа остается постоянной (*закон Бойля—Мариотта*).

Построить графики дробных рациональных функций:

253. $y = x + \dfrac{1}{x}$ (гипербола).

254. $y = x^2 + \dfrac{1}{x}$ (трезубец Ньютона).

255. $y = x + \dfrac{1}{x^2}$.

256. $y = \dfrac{1}{1+x^2}$ (кривая Аньези).

257. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$ (серпантин Ньютона).

258. $y = \dfrac{1}{1-x^2}$. 259. $y = \dfrac{x}{1-x^2}$.

260. $y = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{1-x}$.

261. $y = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{1-x}$.

262. $y = \dfrac{(x+1)(x-2)}{(x-1)(x+2)}$.

263. Построить эскиз графика функции

$$y = \frac{ax^2 + bx + c}{a_1 x + b_1} \quad (a_1 \neq 0),$$

приведя ее к виду

$$y = kx + m + \frac{n}{x - x_0}.$$

Рассмотреть пример

$$y=\frac{x^2-4x+3}{x+1}.$$

264. Построить график абсолютной величины силы притяжения F материальной точки, находящейся на расстоянии x от притягивающего центра, если $F = 10$ кгс при $x = 1$ м (*закон Ньютона*).

265. Согласно закону *Ван-дер-Ваальса* объем v реального газа и его давление p при постоянной температуре связаны соотношением

$$\left(p+\frac{a}{v^2}\right)(v-b)=c.$$

Построить график функции $p=p(v)$, если $a = 2$ $b = 0{,}1$ и $c = 10$.

Построить графики иррациональных функций:

266. $y=\pm\sqrt{-x-2}$ (парабола).

267. $y=\pm x\sqrt{x}$ (парабола Нейля).

268. $y=\pm\frac{1}{2}\sqrt{100-x^2}$ (эллипс).

269. $y=\pm\sqrt{x^2-1}$ (гипербола).

270. $y=\pm\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$. **271.** $y=\pm x\sqrt{100-x^2}$.

272. $y=\pm x\sqrt{\frac{x}{10-x}}$ (циссоида).

273. $y=\pm\sqrt{(x^2-1)(9-x^2)}$.

274. Построить график степенной функции $y = x^n$ при: а) $n = 1,\ 3,\ 5$; б) $n = 2,\ 4,\ 6$.

275. Построить график степенной функции $y = x^n$ при: а) $n = -1,\ -3$; б) $n = -2,\ -4$.

276. Построить график радикала $y = \sqrt[m]{x}$ при: а) $m = 2,\ 4$; б) $m = 3,\ 5$.

277. Построить график радикала $y=\sqrt[m]{x^k}$, если: а) $m = 2,\ k = 1$; б) $m = 2,\ k = 3$; в) $m = 3,\ k = 1$; г) $m = 3,\ k = 2$; д) $m = 3,\ k = 4$; е) $m = 4,\ k = 2$; ж) $m = 4,\ k = 3$.

278. Построить график показательной функции $y = a^x$ при $a = 1/2$, 1, 2, e, 10.

279. Построить график сложной показательной функции $y = e^{y_1}$, если:

а) $y_1 = x^2$; б) $y_1 = -x^2$; в) $y_1 = \frac{1}{x}$;

г) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; д) $y_1 = -\frac{1}{x^2}$; е) $y_1 = \frac{2x}{1-x^2}$.

280. Построить график логарифмической функции $y = \log_a x$ при $a = 1/2$, 2, e, 10.

281. Построить графики функций:

а) $y = \ln(-x)$; б) $y = -\ln x$.

282. Построить график сложной логарифмической функции $y = \ln y_1$, если:

а) $y_1 = 1 + x^2$; б) $y_1 = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3$;

в) $y_1 = \frac{1-x}{1+x}$; г) $y_1 = \frac{1}{x^2}$; д) $y_1 = 1 + e^x$.

283. Построить график функции $y = \log_x 2$.

284. Построить график функции $y = A \sin x$ при $A = 1$, 10, -2.

285. Построить график функции $y = \sin(x - x_0)$, если $x_0 = 0$, $\pi/4$, $\pi/2$, $3\pi/4$, π.

286. Построить график функции $y = \sin nx$, если $n = 1$, 2, 3, 1/2, 1/3.

287. Построить график функции

$$y = a \cos x + b \sin x,$$

приведя ее к виду

$$y = A \sin(x - x_0).$$

Рассмотреть пример: $y = 6 \cos x + 8 \sin x$.

Построить графики тригонометрических функций:

288. $y = \cos x$. **289.** $y = \operatorname{tg} x$. **290.** $y = \operatorname{ctg} x$.
291. $y = \sec x$. **292.** $y = \csc x$. **293.** $y = \sin^2 x$.
294. $y = \sin^3 x$. **295.** $y = \operatorname{ctg}^2 x$.
296. $y = \sin x \cdot \sin 3x$. **297.** $y = \pm\sqrt{\cos x}$.

Построить графики функций:

298. $y=\sin x^2$. **299.** $y=\sin\frac{1}{x}$. **300.** $y=\cos\frac{\pi}{x}$.

300.1. $y=\sin x$. $\sin\frac{1}{x}$. **301.** $y=\operatorname{tg}\frac{\pi}{x}$.

301.1. $y=\sec\frac{1}{x}$. **302.** $y=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$.

303. $y=\pm\sqrt{1-x^2}\sin\frac{\pi}{x}$. **304.** $y=\frac{\sin x}{x}$

305. $y=e^x\cos x$. **306.** $y=\pm 2^{-x}\sqrt{\sin\pi x}$.

307. $y=\frac{\cos x}{1+x^2}$. **308.** $y=\ln(\cos x)$.

309. $y=\cos(\ln x)$. **310.** $y=e^{1/\sin x}$.

Построить графики обратных круговых функций:

311. $y = \arcsin x$. **312.** $y = \arccos x$.

313. $y = \operatorname{arctg} x$. **314.** $y = \operatorname{arcctg} x$.

315. $y=\arcsin\frac{1}{x}$. **316.** $y=\arccos\frac{1}{x}$.

317. $y=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x}$. **318.** $y=\arcsin(\sin x)$.

319. $y = \arcsin(\cos x)$. **320.** $y = \arccos(\cos x)$.

321. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$. **322.** $y = \arcsin(2\sin x)$.

323. Построить график функции

$$y = \arcsin y_1,$$

если:

а) $y_1=1-\frac{x}{2}$; б) $y_1=\frac{2x}{1+x^2}$;

в) $y_1=\frac{1-x}{1+x}$; г) $y_1=e^x$.

324. Построить график функции $y = \operatorname{arctg} y_1$, если:

а) $y_1=x^3$; б) $y_1=\frac{1}{x^2}$; в) $y_1=\ln x$;

г) $y_1=\frac{1}{\sin x}$.

324.1. Построить графики функций:

а) $y = x^3 - 3x + 2$; б) $y = \dfrac{x^3}{(1-x)(1+x)^2}$;

в) $y = \dfrac{x^2}{|x|-1}$; г) $y = \sqrt{x(1-x^2)}$;

д) $y = 3\sin\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)$; е) $y = \operatorname{ctg}\dfrac{\pi x}{1+x^2}$;

ж) $y = \dfrac{1}{1 - 2^{x/1-x}}$; з) $y = \lg(x^2 - 3x + 2)$;

и) $y = \arcsin\left(\dfrac{3}{2} - \sin x\right)$;

к) $y = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-2} + \dfrac{1}{x-3}\right)$;

л) $y = \log_{\cos x}\sin x$; м) $y = (\sin x)^{\operatorname{ctg} x}$.

325. Зная график функции $y = f(x)$, построить графики функций:

а) $y = -f(x)$; б) $y = f(-x)$; в) $y = -f(-x)$.

326. Зная график функции $y = f(x)$, построить графики функций:

а) $y = f(x - x_0)$; б) $y = y_0 + f(x - x_0)$;

в) $y = f(2x)$; г) $y = f(kx + b)$ $(k \neq 0)$.

326.1. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x| & \text{при } |x| \leqslant 1; \\ 0 & \text{при } |x| > 1. \end{cases}$$

Построить графики функций:

$$y = \frac{1}{2}[f(x-t) + f(x+t)]$$

при $t = 0$, $t = 1$ и $t = 2$.

327. Построить графики функций:

а) $y = 2 + \sqrt{1-x}$; б) $y = 1 - e^{-x}$;

в) $y = \ln(1 + x)$;

г) $y = -\arcsin(1 + x)$; д) $y = 3 + 2\cos 3x$.

328. Зная график функции $y = f(x)$, построить графики функций:

а) $y = |f(x)|$; б) $y = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$;

в) $y = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$.

329. Зная график функции $y = f(x)$, построить графики функций:

а) $y = f^2(x)$; б) $y = \sqrt{f(x)}$; в) $y = \ln f(x)$;

г) $y = f(f(x))$; д) $y = \operatorname{sgn} f(x)$; е) $y = [f(x)]$.

329.1. Пусть

$$f(x) = (x-a)(b-x) \quad (a < b).$$

Построить графики функций:

а) $y = f(x)$; б) $y = f^2(x)$; в) $y = \frac{1}{f(x)}$;

г) $y = \sqrt{f(x)}$; д) $y = e^{f(x)}$; е) $y = \lg f(x)$;

ж) $y = \operatorname{arcctg} f(x)$.

329.2. Построить графики функций:

а) $y = \arcsin[\sin f(x)]$; б) $y = \arcsin[\cos f(x)]$;

в) $y = \arccos[\sin f(x)]$; г) $y = \arccos[\cos f(x)]$;

д) $y = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg} f(x)]$,

если: 1) $f(x) = x^2$; 2) $f(x) = x^3$.

330. Зная графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, построить графики функций:

а) $y = f(x) + g(x)$; б) $y = f(x)\,g(x)$; в) $y = f(g(x))$.

Применяя правило сложения графиков, построить графики следующих функций:

331. $y = 1 + x + e^x$. **332.** $y = (x+1)^{-2} + (x-1)^{-2}$.

333. $y = x + \sin x$. **334.** $y = x + \operatorname{arctg} x$.

335. $y = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$.

336. $y = \sin x - \frac{1}{3}\sin 3x + \frac{1}{5}\sin 5x$.

337. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$. **338.** $y=|1-x|+|1+x|$.

339. $y=|1-x|-|1+x|$.

340. Построить графики гиперболических функций:

а) $y=\operatorname{ch} x$, где $\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})$;

б) $y=\operatorname{sh} x$, где $\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$;

в) $y=\operatorname{th} x$, где $\operatorname{th} x=\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}$.

Применяя правило умножения графиков, построить графики функций:

341. $y=x\sin x$. **342.** $y=x\cos x$.

343. $y=x^2\sin^2 x$. **344.** $y=\frac{\sin x}{1+x^2}$.

345. $y=e^{-x^2}\cos 2x$. **346.** $y=x\operatorname{sgn}(\sin x)$.

347. $y=[x]\,|\sin \pi x|$. **348.** $y=\cos x\cdot\operatorname{sgn}(\sin x)$.

349. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} 1-|x|, & \text{если } |x|\leqslant 1;\\ 0, & \text{если } |x|>1.\end{cases}$$

Построить график функции

$$y=f(x)\,f(a-x),$$

если:

а) $a=0$; б) $a=1$; в) $a=2$.

350. Построить график функции

$$y=x+\sqrt{x}\operatorname{sgn}(\sin \pi x).$$

Построить график функции $y=\frac{1}{f(x)}$, если:

351. $f(x)=x^2(1-x^2)$. **352.** $f(x)=x(1-x)^2$.

353. $f(x)=\sin^2 x$. **354.** $f(x)=\ln x$.

355. $f(x)=e^x\sin x$.

356. Построить график сложной функции $y=f(u)$, где $u = 2\sin x$, если:

$$f(u)=\begin{cases} -1 & \text{при } -\infty<u<-1; \\ u & \text{при } -1\leqslant u\leqslant 1; \\ 1 & \text{при } 1<u<+\infty. \end{cases}$$

357. Пусть

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}(x+|x|) \text{ и } \psi(x)=\begin{cases} x, & \text{если } x<0; \\ x^2, & \text{если } x\geqslant 0. \end{cases}$$

Построить графики функций:

а) $y=\varphi[\varphi(x)]$; б) $y=\varphi[\psi(x)]$;
в) $y=\psi[\varphi(x)]$; г) $y=\psi[\psi(x)]$.

358. Пусть

$$\varphi(x)=\begin{cases} 1, & \text{если } |x|\leqslant 1; \\ 0, & \text{если } |x|>1, \end{cases}$$

и

$$\psi(x)=\begin{cases} 2-x^2, & \text{если } |x|\leqslant 2; \\ 2, & \text{если } |x|>2. \end{cases}$$

Построить графики функций:

а) $y=\varphi[\varphi(x)]$; б) $y=\varphi[\psi(x)]$;
в) $y=\psi[\varphi(x)]$; г) $y=\psi[\psi(x)]$.

359. Функцию $f(x)$, определенную в положительной области $x>0$, продолжить в отрицательную область $x<0$ таким образом, чтобы полученная функция была: 1) четной; 2) нечетной, если:

а) $f(x)=1-x$; б) $f(x)=2x-x^2$; в) $f(x)=\sqrt{x}$;
г) $f(x)=\sin x$; д) $f(x)=e^x$; е) $f(x)=\ln x$.

Построить соответствующие графики функций.

360. Определить, относительно каких вертикальных осей симметричны графики функций:

а) $y=ax^2+bx+c$; б) $y=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{(1-x)^2}$;

в) $y=\sqrt{a+x}+\sqrt{b-x}$ $(0<a<b)$;

г) $y=a+b\cos x$.

361. Определить, относительно каких центров симметричны графики функций:

а) $y=ax+b$; б) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$;

в) $y=ax^3+bx^2+cx+d$;

г) $y=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{1}{x-3}$;

д) $y=1+\sqrt[3]{x-2}$.

362. Построить графики периодических функций:

а) $y=|\sin x|$; б) $y=\operatorname{sgn}\cos x$; в) $y=f(x)$,

где $f(x)=A\dfrac{x}{l}\left(2-\dfrac{x}{l}\right)$, если $0\leqslant x\leqslant 2l$ и $f(x+2l)\equiv$ $\equiv f(x)$;

г) $y=[x]-2\left[\dfrac{x}{2}\right]$;

д) $y=(x)$, где (x) — расстояние от числа x до ближайшего к нему целого числа.

363. Доказать, что если график функции $y=$ $=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ симметричен относительно двух вертикальных осей $x=a$ и $x=b$ $(b>a)$, то функция $f(x)$ — периодическая.

364. Доказать, что если график функции $y=$ $=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ симметричен относительно двух точек $A(a,\ y_0)$, и $B(b,\ y_1)$ $(b>a)$, то функция $f(x)$ есть сумма линейной функции и периодической функции. В частности, если $y_0=y_1$, то функция $f(x)$ — периодическая.

365. Доказать, что если график функции $y=$ $=f(x)$ $(-\infty<x<+\infty)$ симметричен относительно точки $A(a,\ y_0)$ и прямой $x=b$ $(b\neq a)$, то функция $f(x)$ — периодическая.

366. Построить график функции $y=f(x)$ $(-\infty<$ $<x<+\infty)$, если $f(x+1)=2f(x)$ и $f(x)=x(1-x)$ при $0\leqslant x\leqslant 1$.

367. Построить график функции

$$y=f(x)\quad(-\infty<x<+\infty),$$

если $f(x+\pi)=f(x)+\sin x$ и $f(x)=0$ при $0\leqslant x\leqslant\pi$.

368. Построить график функции $y = y(x)$, если:

а) $x = y - y^3$; б) $x = \dfrac{1-y}{1+y^2}$;

в) $x = y - \ln y$; г) $x^2 = \sin y$.

369. Построить графики функций $y = y(x)$, заданных параметрически, если:

а) $x = 1 - t$, $y = 1 - t^2$;

б) $x = t + \dfrac{1}{t}$, $y = t + \dfrac{1}{t^2}$;

в) $x = 10 \cos t$, $y = \sin t$ (эллипс);

г) $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ (гипербола);

д) $x = 5 \cos^2 t$, $y = 3 \sin^2 t$;

е) $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$ (циклоида);

ж) $x = \sqrt[t+1]{t}$, $y = \sqrt[t]{t+1}$, $(t > 0)$.

370. Построить графики неявных функций:

а) $x^2 - xy + y^2 = 1$ (эллипс);

б) $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ (декартов лист);

в) $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ (парабола);

г) $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$ (астроида);

д) $\sin x = \sin y$; е) $\cos(\pi x^2) = \cos(\pi y)$;

ж) $x^y = y^x$ $(x > 0,\ y > 0)$; з) $x - |x| = y - |y|$.

370.1. Построить графики неявных функций:

а) $\min(x, y) = 1$; б) $\max(x, y) = 1$;

в) $\max(|x|, |y|) = 1$; г) $\min(x^2, y) = 1$.

371. Построить графики функций $r = r(\varphi)$ в полярной системе координат (r, φ), если:

а) $r = \varphi$ (спираль Архимеда);

б) $r = \dfrac{\pi}{\varphi}$ (гиперболическая спираль);

в) $r = \dfrac{\varphi}{\varphi + 1}$ $(0 \leqslant \varphi < +\infty)$;

г) $r = 2^{\varphi/2\pi}$ (логарифмическая спираль);

д) $r = 2(1 + \cos \varphi)$ (кардиоида);

е) $r = 10 \sin 3\varphi$ (трехлепестковая роза);

ж) $r^2 = 36 \cos 2\varphi$ (лемниската Бернулли);

з) $\varphi = \frac{r}{r-1} \; (r > 1)$;

и) $\varphi = 2\pi \sin r$.

371.1. Построить в полярных координатах r и φ графики следующих функций:

а) $\varphi = 4r - r^2$; б) $\varphi = \frac{12r}{1+r^2}$; в) $r^2 + \varphi^2 = 100$.

371.2. Построить в полярных координатах r и φ графики функций, заданных параметрически ($t \geqslant 0$ — параметр):

а) $\left.\begin{array}{l} \varphi = t\cos^2 t, \\ r = t\sin^2 t, \end{array}\right\}$ б) $\left.\begin{array}{l} \varphi = 1 - 2^{-t} \sin \frac{\pi t}{2}, \\ r = 1 - 2^{-t} \cos \frac{\pi t}{2}. \end{array}\right\}$

372. Приближенно решить уравнение

$$x^3 - 3x + 1 = 0,$$

построив график функции $y = x^3 - 3x + 1$.

Графически решить следующие уравнения:

373. $x^3 - 4x - 1 = 0$. **374.** $x^4 - 4x + 1 = 0$.

375. $x = 2^{-x}$. **376.** $\lg x = 0,1\, x$.

377. $10^x = x^2$. **378.** $\lg x = x$ $(0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

Графически решить системы уравнений:

379. $x + y^2 = 1$, $16x^2 + y = 4$.

380. $x^2 + y^2 = 100$, $y = 10(x^2 - x - 2)$.

§ 5. Предел функции

1°. Ограниченность функции. Функция $f(x)$ называется *ограниченной* на данном промежутке (a, b), если существуют некоторые числа m и M такие, что

$$m \leqslant f(x) \leqslant M$$

при $x \in (a, b)$.

Число $m_0 = \inf\limits_{x \in (a,\, b)} \{f(x)\} = \max m$ называется *нижней гранью* функции $f(x)$, а число $M_0 = \sup\limits_{x \in (a,\, b)} \{f(x)\} = \min M$ называется *верхней гранью* функции $f(x)$ на данном промежутке (a, b). Разность $M_0 - m_0$ называется *колебанием функции* на промежутке (a, b).

2°. Предел функции в точке. Пусть функция $f(x)$ определена на множестве $X = \{x\}$, имеющем точку сгущения a. Запись

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \qquad (1)$$

обозначает, что для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, для которых $f(x)$ имеет смысл и которые удовлетворяют условию $0 < |x - a| < \delta$, справедливо неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Для существования предела функции (1) необходимо и достаточно, чтобы для каждой последовательности $x_n \to a$, $x_n \neq a$ ($x_n \in X$; $n = 1, 2, \ldots$), было выполнено равенство

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n) = A.$$

Имеют место два замечательных предела:

$$1)\ \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \qquad 2)\ \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e.$$

Критерий Коши. Предел функции $f(x)$ в точке a существует тогда и только тогда, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon,$$

как только $0 < |x' - a| < \delta$ и $0 < |x'' - a| < \delta$, где x' и x'' — любые точки из области определения функции $f(x)$.

3°. Односторонние пределы. Число A' называется *пределом слева* функции $f(x)$ в точке a:

$$A' = \lim_{x \to a - 0} f(x) = f(a - 0),$$

если

$$|A' - f(x)| < \varepsilon \text{ при } 0 < a - x < \delta(\varepsilon).$$

Аналогично, число A'' называется *пределом справа* функции $f(x)$ в точке a:

$$A'' = \lim_{x \to a + 0} f(x) = f(a + 0),$$

если

$$|A'' - f(x)| < \varepsilon \text{ при } 0 < x - a < \delta(\varepsilon).$$

Для существования предела функции $f(x)$ в точке a необходимо и достаточно, чтобы

$$f(a-0) = f(a+0).$$

4°. Бесконечный предел. Условная запись

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

обозначает, что для любого $E > 0$ справедливо неравенство:

$$|f(x)| > E, \text{ если только } 0 < |x-a| < \delta(E).$$

5°. Частичный предел. Если для некоторой последовательности $x_n \to a$ ($x_n \neq a$) имеет место равенство

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = B,$$

то число (или символ ∞) B называется *частичным пределом* (соответственно конечным или бесконечным) *функции* $f(x)$ в точке a.

Наименьший и наибольший из этих частичных пределов обозначаются

$$\varliminf_{x\to a} f(x) \quad \text{и} \quad \varlimsup_{x\to a} f(x)$$

и называются соответственно *нижним и верхним пределами* функции $f(x)$ в точке a.

Равенство

$$\varliminf_{x\to a} f(x) = \varlimsup_{x\to a} f(x)$$

необходимо и достаточно для существования предела (соответственно конечного или бесконечного) функции $f(x)$ в точке a.

381. Показать, что функция, определяемая условиями:

$$f(x) = n, \text{ если } x = \frac{m}{n},$$

где m и n — взаимно простые целые числа и $n > 0$ и

$$f(x) = 0, \text{ если } x \text{ иррационально},$$

конечна, но не ограничена в каждой точке x (т. е. не ограничена в любой окрестности этой точки).

382. Если функция $f(x)$ определена и локально ограничена в каждой точке: а) интервала, б) сегмента, то является ли эта функция ограниченной на данном интервале или соответственно сегменте?

Привести соответствующие примеры.

383. Показать, что функция $f(x)=\frac{1+x^2}{1+x^4}$ ограничена в интервале $-\infty < x < +\infty$.

384. Показать, что функция $f(x)=\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ не ограничена в любой окрестности точки $x=0$, однако не является бесконечно большой при $x\to 0$.

385. Исследовать на ограниченность функцию

$$f(x)=\ln x\cdot\sin^2\frac{\pi}{x}$$

в интервале $0<x<\varepsilon$.

386. Показать, что функция $f(x)=\frac{x}{1+x}$ в области $0\leqslant x<+\infty$ имеет нижнюю грань $m=0$ и верхнюю грань $M=1$.

387. Функция $f(x)$ определена и монотонно возрастает на сегменте $[a, b]$. Чему равны ее нижняя и верхняя грани на этом сегменте?

Определить нижнюю и верхнюю грани функций:

388. $f(x)=x^2$ на $[-2, 5)$.

389. $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$ на $(-\infty, +\infty)$.

390. $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$ на $(0, +\infty)$.

391. $f(x)=x+\frac{1}{x}$ на $(0, +\infty)$.

392. $f(x)=\sin x$ на $(0, +\infty)$.

393. $f(x)=\sin x+\cos x$ на $[0, 2\pi]$.

394. $f(x)=2^x$ на $(-1, 2)$.

395. $f(x)=[x]$: а) на $(0, 2)$ и б) на $[0, 2]$.

396. $f(x)=x-[x]$ на $[0, 1]$.

397. Определить колебание функции

$$f(x)=x^2$$

на интервалах: а) $(1; 3)$; б) $(1{,}9; 2{,}1)$; в) $(1{,}99; 2{,}01)$; г) $(1{,}999; 2{,}001)$.

398. Определить колебание функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

на интервалах: а) $(-1;\ 1)$; б) $(-0{,}1;\ 0{,}1)$; в) $(-0{,}01;\ 0{,}01)$; г) $(-0{,}001;\ 0{,}001)$.

399. Пусть $m[f]$ и $M[f]$ — соответственно нижняя и верхняя грани функции $f(x)$ на промежутке (a, b).

Доказать, что если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — функции, определенные на (a, b), то

$$m[f_1 + f_2] \geqslant m[f_1] + m[f_2]$$

и

$$M[f_1 + f_2] \leqslant M[f_1] + M[f_2].$$

Построить примеры функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, для которых в последних соотношениях имеет место: а) случай равенства и б) случай неравенства.

400. Пусть функция $f(x)$ определена в области $[a, +\infty)$ и ограничена на каждом сегменте $[a, b] \subset [a, +\infty)$.

Положим:

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi) \text{ и } M(x) = \sup_{a \leqslant \xi \leqslant x} f(\xi).$$

Построить графики функций $y = m(x)$ и $y = M(x)$, если:

а) $f(x) = \sin x$ и б) $f(x) = \cos x$.

401. С помощью «ε—δ»-рассуждений доказать, что

$$\lim_{x \to 2} x^2 = 4.$$

Заполнить следующую таблицу:

ε	0,1	0,01	0,001	0,0001	...
δ					

402. На языке «E—δ» доказать, что

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty.$$

Заполнить следующую таблицу:

E	10	100	1 000	10 000	...
δ					

403. Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения:

а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$; б) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$; в) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = b$.

Привести соответствующие примеры.

Сформулировать с помощью неравенств следующие утверждения и привести соответствующие примеры:

404. а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$; б) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = b$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = b$.

405. а) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$; б) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$; г) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$;

д) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$;

е) $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = +\infty$; ж) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$;

з) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$; и) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = +\infty$.

406. а) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$; г) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$;

д) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$; е) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$;

ж) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \infty$; з) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$;

и) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

407. Пусть $y = f(x)$. Сформулировать с помощью неравенств, что значит:

а) $y \to b - 0$ при $x \to a$;
б) $y \to b - 0$ при $x \to a - 0$;
в) $y \to b - 0$ при $x \to a + 0$;
г) $y \to b + 0$ при $x \to a$;
д) $y \to b + 0$ при $x \to a - 0$;
е) $y \to b + 0$ при $x \to a + 0$;
ж) $y \to b - 0$ при $x \to \infty$;
з) $y \to b - 0$ при $x \to -\infty$;
и) $y \to b - 0$ при $x \to +\infty$;
к) $y \to b + 0$ при $x \to \infty$;
л) $y \to b + 0$ при $x \to -\infty$;
м) $y \to b + 0$ при $x \to +\infty$.

Привести соответствующие примеры.

408. Пусть

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n,$$

где a_i ($i=0, 1, \ldots, n$; $n \geqslant 1, a_0 \neq 0$) — вещественные числа.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty} |P(x)| = +\infty$.

409. Пусть $R(x) = \dfrac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m}$, где $a_0 \neq 0$ и $b_0 \neq 0$.

Доказать, что

$$\lim_{x\to\infty} R(x) = \begin{cases} \infty, & \text{если } n > m; \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{если } n = m; \\ 0, & \text{если } n < m. \end{cases}$$

410. Пусть $R(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$,

где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены от x и

$$P(a) = Q(a) = 0.$$

Какие возможные значения имеет выражение

$$\lim \frac{P(x)}{}?$$

Найти значения следующих выражений:

411. а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$; б) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$;

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$.

412. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$.

413. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^5-(1+5x)}{x^2+x^5}$.

414. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+mx)^n-(1+nx)^m}{x^2}$ (m и n — натуральные числа).

415. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)}{(5x-1)^5}$.

416. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x-3)^{20}(3x+2)^{30}}{(2x+1)^{50}}$.

417. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(x+1)(x^2+1)\ldots(x^n+1)}{[(nx)^n+1]^{\frac{n+1}{2}}}$.

418. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$. **419.** $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$.

420. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^4-3x+2}{x^5-4x+3}$. **421.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$.

422. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$. **423.** $\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x^2-x-2)^{20}}{(x^3-12x+16)^{10}}$.

424. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+x^2+\ldots+x^n-n}{x-1}$.

424.1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{100}-2x+1}{x^{50}-2x+1}$.

425. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}$ (m и n — натуральные числа).

426. $\lim\limits_{x\to a}\frac{(x^n-a^n)-na^{n-1}(x-a)}{(x-a)^2}$ (n — натуральное число).

427. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^{n+1}-(n+1)x+n}{(x-1)^2}$ (n — натуральное число).

428. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{m}{1-x^m}-\dfrac{n}{1-x^n}\right)$ (m и n — натуральные числа).

429. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)+\left(x+\dfrac{2a}{n}\right)+\ldots\right.$

$$\left.\ldots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)\right].$$

430. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\left[\left(x+\dfrac{a}{n}\right)^2+\left(x+\dfrac{2n}{n}\right)^2+\ldots\right.$

$$\left.\ldots+\left(x+\frac{(n-1)a}{n}\right)^2\right].$$

Указание. См. пример 2.

431. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^2+3^2+\ldots+(2n-1)^2}{2^2+4^2+\ldots+(2n)^2}$.

432. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1^3+2^3+\ldots+n^3}{n^3}-\dfrac{n}{4}\right)$.

Указание. См. пример 3.

433. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^3+4^3+7^3+\ldots+(3n-2)^3}{[1+4+7+\ldots+(3n-2)]^2}$.

434. Определить площадь криволинейного треугольника OAM (рис. 3), ограниченного параболой $y =$

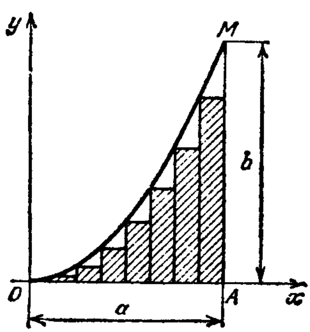

Рис. 3

$= b\,(x/a)^2$, осью Ox и прямой $x = a$, рассматривая ее как предел суммы площадей вписанных прямоугольников с основаниями a/n, где $n\to\infty$.

Найти пределы:

435. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

436. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}}{\sqrt{2x+1}}$.

437. $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$.

438. $\lim\limits_{x\to -8} \dfrac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$.

439. $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{a}+\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a>0)$.

440. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$.

441. $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{\sqrt[3]{x-6}+2}{x^3+8}$.

442. $\lim\limits_{x\to 16} \dfrac{\sqrt[4]{x}-2}{\sqrt{x}-4}$. 443. $\lim\limits_{x\to 8} \dfrac{\sqrt{9+2x}-5}{\sqrt[3]{x}-2}$.

444. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-1}{x}$ (n—целое число).

445. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1-2x-x^2}-(1+x)}{x}$.

446. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{8+3x-x^2}-2}{x+x^2}$.

447. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{27+x}-\sqrt[3]{27-x}}{x+2\sqrt[3]{x^4}}$.

448. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}$.

449. $\lim\limits_{x\to 7} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt[3]{x+20}}{\sqrt[4]{x+9}-2}$.

450. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+\dfrac{x}{3}}-\sqrt[4]{1+\dfrac{x}{4}}}{1-\sqrt{1-\dfrac{x}{2}}}$.

451. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt[5]{1+5x}-(1+x)}$.

452. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}-\sqrt[n]{1+\beta x}}{x}$ (m и n—целые числа).

453. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+\alpha x}\,\sqrt[n]{1+\beta x}-1}{x}$ (m и n — целые числа).

454. Пусть $P(x)=a_1x+a_2x^2+\ .\ .\ .+a_nx^n$ и m— целое число.

Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[m]{1+P(x)}-1}{x}=\dfrac{a_1}{m}$.

Найти пределы:

455. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}$ (m и n—целые числа).

455.1. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{1-\sqrt{x}}-\dfrac{3}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$.

456. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(1-\sqrt{x})(1-\sqrt[3]{x})\dots(1-\sqrt[n]{x})}{(1-x)^{n-1}}$.

457. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\right]$.

458. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x}\right)$.

459. $\lim\limits_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{x^2+2x}-2\sqrt{x^2+x}+x\right)$.

460. $\lim\limits_{x\to+0}\left(\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}+\sqrt{\dfrac{1}{x}}}}-\right.$

$$\left.-\sqrt{\frac{1}{x}-\sqrt{\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x}}}}\right).$$

461. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+x^2+1}-\sqrt[3]{x^3-x^2+1}\right)$.

462. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2}-\sqrt{x^2-2x}\right)$.

463. $\lim\limits_{x\to\infty} x^{1/3}\left[(x+1)^{2/3}-(x-1)^{2/3}\right]$.

464. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}\right)$.

465. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\sqrt[n]{(x-a_1)\ldots(x+a_n)}-x\right]$.

466. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n+\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n}{x^n}$ (n — натуральное число).

467. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^n-\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)^n}{x}$ (n — натуральное число).

468. Изучить поведение корней x_1 и x_2 квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$, у которого коэффициент a стремится к нулю, а коэффициенты b и c постоянны, причем $b\neq 0$.

469. Найти постоянные a и b из условия

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0.$$

470. Найти постоянные a_i и b_i ($i=1, 2$) из условий:

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2-x+1}-a_1x-b_1\right)=0$$

и

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2-x+1}-a_2x-b_2)=0.$$

Найти пределы:

471. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$. **472.** $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}$.

473. $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin mx}{\sin nx}$ (m и n — целые числа).

474. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$. **474.1.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$.

474.2. $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{ctg} 3x$.

475. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-\sin x}{\sin^3 x}$. **476.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x-\sin 3x}{\sin x}$.

477. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos 3x}{x^2}$. **478.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin px-\cos px}$.

479. $\lim\limits_{x\to \pi/4}\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-x\right)$. **480.** $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\operatorname{tg}\dfrac{\pi x}{2}$.

481. Доказать равенства:

а) $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$; б) $\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$;

в) $\lim\limits_{x\to a}\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} a$

$$\left(a\neq\frac{2n-1}{2}\pi;\quad n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots\right).$$

Найти пределы:

482. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$. **483.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\cos x-\cos a}{x-a}$.

484. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} a}{x-a}$. **485.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg} a}{x-a}$.

486. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sec x-\sec a}{x-a}$. **487.** $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\operatorname{cosec} x-\operatorname{cosec} a}{x-a}$.

488. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+2x)-2\sin(a+x)+\sin a}{x^2}$.

489. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(a+2x)-2\cos(a+x)+\cos a}{x^2}$.

490. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+2x)-2\operatorname{tg}(a+x)+\operatorname{tg} a}{x^2}$.

491. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ctg}(a+2x)-2\operatorname{ctg}(a+x)+\operatorname{ctg} a}{x^2}$.

492. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(a+x)\sin(a+2x)-\sin^2 a}{x}$.

493. $\lim\limits_{x\to \pi/6}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}$.

494. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\cos 2x\cos 3x}{1-\cos x}$.

495. $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$. **496.** $\lim\limits_{x\to\pi/3}\dfrac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)}$.

497. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}(a+x)\operatorname{tg}(a-x)-\operatorname{tg}^2 a}{x^2}$.

498. $\lim\limits_{x\to\pi/4}\dfrac{1-\operatorname{ctg}^3 x}{2-\operatorname{ctg} x-\operatorname{ctg}^3 x}$.

499. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\operatorname{tg} x}-\sqrt{1+\sin x}}{x^3}$.

500. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$.

501. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{\cos x}-\sqrt[3]{\cos x}}{\sin^2 x}$.

502. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1-\cos x^2}}{1-\cos x}$. **503.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{\cos x}}{1-\cos(\sqrt{x})}$.

504. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}\sqrt[3]{\cos 3x}}{x^2}$.

505. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$.

506. а) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$;

б) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1+x}{2+x}\right)^{(1-\sqrt{x})/(1-x)}$.

507. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{2x-1}\right)^{x^2}$. **508.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^2-x+1}{2x^2+x+1}\right)^{\frac{x^3}{1-x}}$.

509. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin^n\dfrac{2\pi n}{3n+1}\right)$.

510. $\lim\limits_{x\to\pi/4+0}\left[\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{8}+x\right)\right]^{\operatorname{tg}2x}$.

511. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$. **512.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{x^2}$.

513. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{1/x}$. 514. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{1-2x}$.

515. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^{x}$.

516. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{a_1x+b_1}{a_2x+b_2}\right)^{x}$ $(a_1>0,\ a_2>0)$.

517. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}$. 518. $\lim\limits_{x\to 1}(1+\sin\pi x)^{\operatorname{ctg}\pi x}$.

519. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin x}$.

519.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{1/\sin^3 x}$.

520. $\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)^{\frac{1}{x-a}}$. 521. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

522. $\lim\limits_{x\to\pi/4}(\operatorname{tg}x)^{\operatorname{tg}2x}$. 523. $\lim\limits_{x\to\pi/2}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

524. $\lim\limits_{x\to 0}\left[\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right]^{\operatorname{ctg}x}$.

525. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}$.

526. $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$.

527. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^{n}$. 528. $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$.

529. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$. 530. $\lim\limits_{x\to+\infty}x[\ln(x+1)-\ln x]$.

531. $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x-\ln a}{x-a}$ $(a>0)$.

532. $\lim\limits_{x\to+\infty}[\sin\ln(x+1)-\sin\ln x]$.

533. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

534. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\operatorname{tg}\frac{100+x^2}{1+100x^2}\right)$.

535. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}$.

536. $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}\right)}{\ln\left(1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$.

537. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\log(x+h)+\log(x-h)-2\log x}{h^2}$ $(x>0)$.

538. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+ax\right)}{\sin bx}$. 539. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$.

540. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\ln\dfrac{nx+\sqrt{1-n^2x^2}}{x+\sqrt{1-x^2}}\right)$.

540.1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(nx+\sqrt{1-n^2x^2})}{\ln(x+\sqrt{1-x^2})}$.

541. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$ $(a>0)$. 542. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^x-x^a}{x-a}$ $(a>0)$.

543. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^x-a^a}{x-a}$ $(a>0)$. 544. $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$.

545. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+x\cdot 2^x}{1+x\cdot 3^x}\right)^{1/x^2}$.

545.1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1+\sin x\cos\alpha x}{1+\sin x\cos\beta x}\right)^{\operatorname{ctg}^3 x}$.

545.2. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(\pi x^\alpha)}{\sin(\pi x^\beta)}$. 545.3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin^2(\pi\cdot 2^x)}{\ln[\cos(\pi\cdot 2^x)]}$.

546. $\lim\limits_{n\to\infty}\operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{1}{n}\right)$. 547. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\alpha x}-e^{\beta x}}{\sin\alpha x-\sin\beta x}$.

548. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^\alpha-a^\alpha}{x^\beta-a^\beta}$ $(a>0)$. 549. $\lim\limits_{x\to b}\dfrac{a^x-a^b}{x-b}$ $(a>0)$.

550. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}+a^{x-h}-2a^x}{h^2}$ $(a>0)$.

551. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(x+a)^{x+a}(x+b)^{x+b}}{(x+a+b)^{2x+a+b}}$.

552. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{x}-1\right)$ $(x>0)$.

553. $\lim\limits_{n\to\infty} n^2\left(\sqrt[n]{x}-\sqrt[n+1]{x}\right)$ $(x>0)$.

554. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a-1+\sqrt[n]{b}}{a}\right)^n$ $(a>0,\ b>0)$.

555. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$ $(a>0,\ b>0)$.

556. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3}\right)^{1/x}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

557. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x+1}+b^{x+1}+c^{x+1}}{a+b+c}\right)^{1/x}$ $(a>0,\ b>0,\ c>0)$.

558. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^{x^2}+b^{x^2}}{a^x+b^x}\right)^{1/x}$ $(a>0,\ b>0)$.

559. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^{x^2}-b^{x^2}}{(a^x-b^x)^2}$ $(a>0,\ b>0)$.

560. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{a^{a^x}-a^{x^a}}{a^x-x^a}$ $(a>0)$.

561. а) $\lim\limits_{x\to -\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(1+3^x)}{\ln(1+2^x)}$.

562. $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(1+2^x)\ln\left(1+\dfrac{3}{x}\right)$.

563. $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)\log_x 2$.

564. Доказать, что

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{x^n}{a^x}=0\quad (a>1,\ n>0).$$

565. Доказать, что

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\log_a x}{x^{\varepsilon}}=0\qquad (a>1,\ \varepsilon>0).$$

Найти пределы:

566. а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln(x^2+e^x)}{\ln(x^4+e^{2x})}$.

567. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+xe^x)}{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

568. $\lim\limits_{x\to +\infty}[(x+2)\ln(x+2)-2(x+1)\ln(x+1)+x\ln x]$.

569. $\lim\limits_{x\to +0}\left[\ln(x\ln a)\cdot\ln\left(\dfrac{\ln ax}{\ln\dfrac{x}{a}}\right)\right]$ $(a>1)$.

570. $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\ln\dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{x+\sqrt{x^2-1}}\cdot\ln^{-2}\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

571. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + x \sin x} - 1}{e^{x^2} - 1}$.

572. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(xe^{x}) - \cos(xe^{-x})}{x^3}$.

573. $\lim\limits_{x \to 0} (2e^{x/(x+1)} - 1)^{(x^2+1)/x}$. **574.** $\lim\limits_{x \to 1} (2 - x)^{\sec(\pi x/2)}$.

575. $\lim\limits_{x \to \pi/2} \dfrac{1 - \sin^{\alpha+\beta} x}{\sqrt{(1 - \sin^{\alpha} x)(1 - \sin^{\beta} x)}}$ $(\alpha > 0,\ \beta > 0)$.

576. а) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$; б) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2}$;

в) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{th} x}{x}$ (см. пример 340).

576.1. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sh}^2 x}{\ln(\operatorname{ch} 3x)}$ (см. пример 340).

577. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sh}\sqrt{x^2 + x} - \operatorname{sh}\sqrt{x^2 - x}}{\operatorname{ch} x}$.

577.1. а) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{sh} x - \operatorname{sh} a}{x - a}$; б) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} a}{x - a}$.

577.2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln \operatorname{ch} x}{\ln \cos x}$. **578.** $\lim\limits_{x \to +\infty} (x - \ln \operatorname{ch} x)$.

579. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{\sin 2x} - e^{\sin x}}{\operatorname{th} x}$.

580. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(\dfrac{\operatorname{ch} \dfrac{\pi}{n}}{\cos \dfrac{\pi}{n}} \right)^{n^2}$.

581. $\lim\limits_{x \to \infty} \arcsin \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

582. $\lim\limits_{x \to +\infty} \arccos\left(\sqrt{x^2 + x} - x\right)$.

583. $\lim\limits_{x \to 2} \operatorname{arctg} \dfrac{x - 4}{(x - 2)^2}$. **584.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} \dfrac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$.

585. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}(x + h) - \operatorname{arctg} x}{h}$.

586. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln \dfrac{1+x}{1-x}}{\operatorname{arctg}(1+x)-\operatorname{arctg}(1-x)}$.

587. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[n \operatorname{arctg} \dfrac{1}{n(x^2+1)+x} \cdot \operatorname{tg}^n\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{x}{2n}\right)\right]$.

588. $\lim\limits_{x\to\infty} x\left(\dfrac{\pi}{4}-\operatorname{arctg}\dfrac{x}{x+1}\right)$.

589. $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

590. $\lim\limits_{n\to\infty}\left[1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right]^{\operatorname{cosec}(\pi\sqrt{1+n^2})}$.

591. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^{100}}e^{-1/x^2}$. 592. $\lim\limits_{x\to+0} x\ln x$.

593. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)$.

594. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2})$.

594.1 Найти $h=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, если

$$f(x)=\ln\frac{x+\sqrt{x^2+a^2}}{x+\sqrt{x^2+b^2}}.$$

595. а) $\lim\limits_{x\to1-0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$; б) $\lim\limits_{x\to1+0}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{1-x}$.

596. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$; б) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{1}{1+e^{1/x}}$.

597. а) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(1+e^x)}{x}$.

598. Доказать, что

а) $\dfrac{2x}{1+x}\to 2+0$ при $x\to-\infty$;

б) $\dfrac{2x}{1+x}\to 2-0$ при $x\to+\infty$.

599. Доказать, что

а) $2^x \to 1-0$ при $x \to -0$;

б) $2^x \to 1+0$ при $x \to +0$.

600. Найти $f(1)$, $f(1-0)$, $f(1+0)$, если $f(x) = x + [x^2]$.

601. Найти $f(n)$, $f(n-0)$, $f(n+0)$ $(n = 0, \pm 1, \ldots)$, если $f(x) = \operatorname{sgn}(\sin \pi x)$.

Найти:

602. $\lim\limits_{x\to 0} x\sqrt{\cos\frac{1}{x}}$. **603.** $\lim\limits_{x\to 0} x\left[\frac{1}{x}\right]$.

604. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$.

605. $\lim\limits_{n\to\infty} \sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

606. $\lim\limits_{n\to\infty} \underbrace{\sin \sin \ldots \sin}_{n \text{ раз}} x$.

607. Если $\lim\limits_{x\to a} \varphi(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to A} \psi(x) = B$, то следует ли отсюда, что

$$\lim_{x\to a} \psi(\varphi(x)) = B?$$

Рассмотреть пример: $\varphi(x) = 1/q$ при $x = p/q$, где p и q — взаимно простые целые числа и $\varphi(x) = 0$ при x — иррациональном; $\psi(x) = 1$ при $x \neq 0$ и $\psi(x) = 0$ при $x = 0$; причем $x \to 0$.

608. Доказать теоремы Коши: если функция $f(x)$ определена в интервале $(a, +\infty)$ и ограничена в каждом конечном интервале (a, b), то

а) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)]$;

б) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)]^{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)}{f(x)}$ $\quad (f(x) \geqslant C > 0)$,

предполагая, что пределы в правых частях равенств существуют.

609. Доказать, что если: а) функция $f(x)$ определена в области $x > a$; б) ограничена в каждой конечной области $a < x < b$; в) $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x+1) - f(x)] = \infty$, то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty.$$

610. Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ определена в области $x > a$; 2) ограничена в каждой конечной области $a < x < b$; 3) для некоторого натурального n существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x+1)-f(x)}{x^n} = l,$$

то

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^{n+1}} = \frac{l}{n+1}.$$

611. Доказать, что

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}\right) = e^x$.

612. Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} n\sin(2\pi e n!) = 2\pi.$$

Указание. Использовать формулу (*) примера 72.

Построить график функций:

613. а) $y = 1 - x^{100}$; б) $y = \lim\limits_{n\to\infty}(1-x^{2n})\ (-1 \leqslant x \leqslant 1)$

614. а) $y = \frac{x^{100}}{1+x^{100}}\ (x \geqslant 0)$; б) $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n}\ (x \geqslant 0)$.

615. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n - x^{-n}}{x^n + x^{-n}}\quad (x \neq 0)$.

616. $x = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{x^2+\frac{1}{n^2}}$.

617. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}\quad (x \geqslant 0)$.

618. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n+\left(\frac{x^2}{2}\right)^n}\quad (x \geqslant 0)$.

619. $y = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^{n+2}}{\sqrt{2^{2n}+x^{2n}}}\quad (x \geqslant 0)$.

620. а) $y = \sin^{1000} x$; б) $y = \lim\limits_{n\to\infty}\sin^{2n} x$.

621. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2^n + x^n)}{n}$ $(x \geqslant 0)$.

622. $y = \lim\limits_{n\to\infty} (x-1)\operatorname{arctg} x^n$.

623. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{1 + e^{n(x+1)}}$.

624. $y = \lim\limits_{t\to+\infty} \dfrac{x + e^{tx}}{1 + e^{tx}}$.

625. $y = \lim\limits_{t\to x} \dfrac{1}{t-x} \ln \dfrac{t}{x}$ $(x > 0)$.

625.1. $y = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x \operatorname{tg}^{2n} \dfrac{\pi x}{4} + \sqrt{x}}{\operatorname{tg}^{2n} \dfrac{\pi x}{4} + 1}$ $(x \geqslant 0)$.

625.2. $y = \lim\limits_{n\to\infty} x \operatorname{sgn} |\sin^2(n!\pi x)|$.

625.3. Построить кривую

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x|^n + |y|^n} = 1.$$

626. *Асимптотой* (наклонной) для кривой $y = f(x)$ называется прямая $y = kx + b$, для которой

$$\lim_{x\to\infty} [f(x) - (kx + b)] = 0.$$

Используя это уравнение, вывести необходимые и достаточные условия существования асимптоты.

627. Найти асимптоты и построить следующие кривые:

а) $y = \dfrac{x^3}{x^2 + x - 2}$; б) $y = \sqrt{x^2 + x}$;

в) $y = \sqrt[3]{x^2 - x^3}$; г) $y = \dfrac{xe^x}{e^x - 1}$;

д) $y = \ln(1 + e^x)$; е) $y = x + \arccos \dfrac{1}{x}$.

Найти следующие пределы:

628. $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\dfrac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dfrac{x^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots + \dfrac{x^{2n}}{(2n)!}\right]$.

629. $\lim\limits_{n\to\infty} [(1+x)(1+x^2)(1+x^4)\ldots(1+x^{2^n})]$, если $|x| < 1$.

630. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n}\right)$.

631. Пусть $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}=1$, где $\psi(x)>0$ и пусть $\alpha_{mn}\rightrightarrows 0$ $(m=1, 2, \ldots)$ при $n\to\infty$, т. е. $|\alpha_{mn}|<\varepsilon$ при $m=1, 2, \ldots$ и $n>N(\varepsilon)$.

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty}[\varphi(\alpha_{1n})+\varphi(\alpha_{2n})+\ldots+\varphi(\alpha_{nn})]=$$
$$=\lim_{n\to\infty}[\psi(\alpha_{1n})+\psi(\alpha_{2n})+\ldots+\psi(\alpha_{nn})], \qquad (1)$$

предполагая, что предел в правой части равенства (1) существует.

Пользуясь предыдущей теоремой, найти:

632. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt[3]{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$.

633. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sin\frac{ka}{n^2}\right)$.

634. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}(a^{k/n^2}-1)$ $(a>0)$.

635. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n^2}\right)$.

636. $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}\cos\frac{ka}{n\sqrt{n}}$.

637. Последовательность x_n задана равенствами:

$$x_1=\sqrt{a},\ x_2=\sqrt{a+\sqrt{a}},\ x_3=\sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ \ldots$$
$$(a>0).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

637.1. Последовательность x_n задается следующим образом:

$$x_1 = 0, \ x_2 = 1,$$

$$x_n = \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n-2}) \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$

637.2. Последовательность y_n определяется с помощью последовательности x_n соотношениями:

$$y_0 = x_0, \ y_n = x_n - \alpha x_{n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где $|\alpha| < 1$. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$.

637.3. Последовательность x_n определяется следующим образом:

$$x_0 = 1, \ x_n = \frac{1}{1 + x_{n-1}} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Указание Рассмотреть разности между x_n и корнями уравнения $x = \dfrac{1}{1+x}$.

638. Последовательность функций

$$y_n = y_n(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$$

определяется следующим образом:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} - \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

639. Последовательность функций $y_n = y_n(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ определяется следующим образом:

$$y_1 = \frac{x}{2}, \quad y_n = \frac{x}{2} + \frac{y_{n-1}^2}{2} \quad (n = 2, 3, \ldots).$$

Найти $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

639.1. Пусть $x > 0$ и $y_n = y_{n-1}(2 - xy_{n-1})$ $(n = 1, \text{-}, \ldots)$. Доказать, что если $y_i > 0$ $(i = 0, 1)$, то последовательность y_n сходится и

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{x}.$$

Указание. Изучить разность

$$\frac{1}{x}-y_n.$$

639.2. Для нахождения $y=\sqrt{x}$, где $x>0$, применяется следующий процесс: $y_0>0$ — произвольно,

$$y_n=\frac{1}{2}\left(y_{n-1}+\frac{x}{y_{n-1}}\right) \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Доказать, что

$$\lim_{n\to\infty} y_n=\sqrt{x}.$$

Указание. Использовать формулу

$$\frac{y_n-\sqrt{x}}{y_n+\sqrt{x}}=\left(\frac{y_{n-1}-\sqrt{x}}{y_{n-1}+\sqrt{x}}\right)^2 \quad (n\geqslant 1).$$

640. Для приближенного решения *уравнения Кеплера*

$$x-\varepsilon\sin x=m \qquad (0<\varepsilon<1) \tag{1}$$

полагают

$$x_0=m,\ x_1=m+\varepsilon\sin x_0,\ \ldots,\ x_n=m+\varepsilon\sin x_{n-1},\ \ldots$$

(*метод последовательных приближений*).

Доказать, что существует $\xi=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ и число ξ является единственным корнем уравнения (1).

641. Если $\omega_h[f]$ есть колебание функции $f(x)$ на сегменте $|x-\xi|\leqslant h$ $(h>0)$, то число

$$\omega_0[f]=\lim_{h\to 0}\omega_h[f]$$

называется *колебанием функции* $f(x)$ *в точке* ξ.

Определить колебание функции $f(x)$ в точке $x=0$, если $f(0)=0$ и при $x\neq 0$ имеем:

а) $f(x)=\sin\frac{1}{x}$; б) $f(x)=\frac{1}{x^2}\cos^2\frac{1}{x}$;

в) $f(x)=x\left(2+\sin\frac{1}{x}\right)$; г) $f(x)=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$;

д) $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$; е) $f(x)=\frac{1}{1+e^{1/x}}$;

ж) $f(x)=(1+|x|)^{1/x}$.

642. Пусть $f(x)=\sin\frac{1}{x}$.

Доказать, что, каково бы ни было число α, удовлетворяющее условию $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1$, можно выбрать последовательность $x_n \to 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \alpha$.

643. Определить

$$l = \varliminf_{x\to 0} f(x) \text{ и } L = \varlimsup_{x\to 0} f(x),$$

если:

а) $f(x) = \sin^2 \frac{1}{x} + \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$;

б) $f(x) = (2 - x^2) \cos \frac{1}{x}$; в) $f(x) = \left(1 + \cos^2 \frac{1}{x}\right)^{\sec^2 (1/x)}$

644. Определить

$$l = \varliminf_{x\to\infty} f(x) \text{ и } L = \varlimsup_{x\to\infty} f(x),$$

если:

а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = x^2 \cos^2 x$;

в) $f(x) = 2^{\sin x^2}$; г) $f(x) = \frac{x}{1 + x^2 \sin^2 x}$ $(x \geqslant 0)$.

§ 6. *O*-символика

1°. Запись

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ при } x \in X$$

обозначает, что существует постоянная A такая, что

$$|\varphi(x)| \leqslant A |\psi(x)| \text{ для } x \in X. \qquad (1)$$

Аналогично пишут

$$\varphi(x) = O(\psi(x)) \text{ при } x \to a, \qquad (2)$$

если неравенство (1) выполнено в некоторой окрестности U_a точки a $(x \neq a)$. В частности, если $\psi(x) \neq 0$ при $x \in U_a$ $(x \neq a)$, то соотношение (2) заведомо имеет место, если существует конечный $\lim\limits_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} \neq 0$. В этом случае будем писать $\varphi(x) = O^*(\psi(x))$.

Если

$$\lim_{x\to 0} \frac{\varphi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0),$$

то $\varphi(x)$ называется *бесконечно малой порядка* p относительно бесконечно малой x. Аналогично, если

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{x^p} = k \neq 0 \quad (p > 0),$$

то $\psi(x)$ называется *бесконечно большой порядка* p относительно бесконечно большой x

2°. Запись

$$\varphi(x) = o(\psi(x)) \text{ при } x \to a$$

обозначает, что

$$\varphi(x) = \alpha(x)\psi(x) \quad (x \in U_a, \ x \neq a), \tag{3}$$

где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Если $\psi(x) \neq 0$ при $x \in U_a$, $x \neq a$, то равенство (3) эквивалентно утверждению

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0.$$

3°. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ называются *эквивалентными* ($\varphi(x) \sim \psi(x)$) при $x \to a$, если

$$\varphi(x) - \psi(x) = o(\psi(x)) \text{ при } x \to a. \tag{4}$$

Если $\psi(x) \neq 0$ при $x \in U_a$, $x \neq a$, то из (4) имеем

$$\lim_{x\to a} \frac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 1.$$

При $x \to 0$ справедливы соотношения эквивалентности:

$$\sin x \sim x; \ \operatorname{tg} x \sim x; \ a^x - 1 \sim x \ln a \ (a > 0);$$

$$\ln(1+x) \sim x; \quad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

Вообще

$$\varphi(x) + o(\varphi(x)) \sim \varphi(x).$$

При нахождении предела отношения двух бесконечно малых (или бесконечно больших) функций при $x \to a$ данные функции можно заменять эквивалентными.

645. Считая центральный угол $AOB = x$ (рис. 4) бесконечно малой 1-го порядка, определить порядки малости следующих величин: а) хорды AB; б) стрелки CD; в) площади сектора AOB; г) площади треугольника ABC; д) площади трапеции ABB_1A_1; е) площади сегмента ABC.

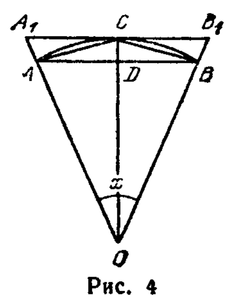

Рис. 4

646. Пусть $o(f(x))$ — произвольная функция, имеющая при $x \to a$ более низкий порядок роста, чем функция $f(x)$, и $O(f(x))$ — любая функция, имеющая при

$x \to a$ тот же порядок роста, что и функция $f(x)$, где $f(x) > 0$.

Показать, что

а) $o(o(f(x))) = o(f(x))$; б) $O(o(f(x))) = o(f(x))$;

в) $o(O(f(x))) = o(f(x))$; г) $O(O(f(x))) = O(f(x))$,

д) $O(f(x)) + o(f(x)) = O(f(x))$.

647. Пусть $x \to 0$ и $n > 0$. Показать, что

а) $CO(x^n) = O(x^n)$ ($C \neq 0$ — постоянная);

б) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ $(n < m)$;

в) $O(x^n)\,O(x^m) = O(x^{n+m})$.

648. Пусть $x \to +\infty$ и $n>0$. Показать, что

а) $CO(x^n) = O(x^n)$;

б) $O(x^n) + O(x^m) = O(x^n)$ $(n > m)$;

в) $O(x^n)\,O(x^m) = O(x^{n+m})$.

649. Показать, что символ $\sim$ обладает свойствами: 1) рефлексивности: $\varphi(x) \sim \varphi(x)$; 2) симметрии: если $\varphi(x) \sim \psi(x)$, то $\psi(x) \sim \varphi(x)$; 3) транзитивности: если $\varphi(x) \sim \psi(x)$ и $\psi(x) \sim \chi(x)$, то $\varphi(x) \sim \chi(x)$.

650. Пусть $x \to 0$. Доказать следующие равенства:

а) $2x - x^2 = O(x)$; б) $x \sin \sqrt{x} = O(x^{3/2})$;

в) $x \sin \dfrac{1}{x} = O(|x|)$; г) $\ln x = o\left(\dfrac{1}{x^\varepsilon}\right)$ $(\varepsilon > 0)$;

д) $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}} \sim \sqrt[8]{x}$;

е) $\operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = O(1)$;

ж) $(1 + x)^n = 1 + nx + o(x)$.

651. Пусть $x \to +\infty$. Доказать следующие равенства:

а) $2x^3 - 3x^2 + 1 = O(x^3)$;

б) $\dfrac{x+1}{x^2+1} = O\left(\dfrac{1}{x}\right)$;

в) $x+x^2\sin x=O(x^2)$; г) $\dfrac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}=O\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

д) $\ln x=o(x^\varepsilon)$ $(\varepsilon>0)$; е) $x^pe^{-x}=o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$;

ж) $\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}\sim\sqrt{x}$; з) $x^2+x\ln^{100}x\sim x^2$.

652. Доказать, что при достаточно большом $x>0$ имеют место неравенства:

а) $x^2+10x+100<0{,}001x^3$;

б) $\ln^{1000}x<\sqrt{x}$; в) $x^{10}e^x<e^{2x}$.

652.1. Доказать асимптотическую формулу

$$\sqrt{x^2+px+q}=x+\frac{p}{2}+O\left(\frac{1}{x}\right)$$

при $x\to+\infty$.

653. Пусть $x\to 0$. Выделить главный член вида Cx^n (C — постоянная) и определить порядки малости относительно переменной x следующих функций:

а) $2x-3x^3+x^5$; б) $\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}$;

в) $\sqrt{1-2x}-\sqrt[3]{1-3x}$; г) $\operatorname{tg}x-\sin x$.

654. Пусть $x\to 0$. Показать, что бесконечно малые

а) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$; б) $f(x)=e^{-1/x^2}$

не сравнимы с бесконечно малой x^n $(n>0)$, каково бы ни было n, т. е. ни при каком n не может иметь место равенство $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^n}=k$, где k — конечная величина, отличная от нуля.

655. Пусть $x\to 1$. Выделить главный член вида $C(x-1)^n$ и определить порядки малости относительно бесконечно малой $x-1$ следующих функций:

а) x^3-3x+2; б) $\sqrt[3]{1-\sqrt{x}}$;

в) $\ln x$; г) e^x-e; д) x^x-1.

656. Пусть $x \to +\infty$. Выделить главный член вида Cx^n и определить порядки роста относительно бесконечно большой x следующих функций:

а) $x^2+100x+10000$; б) $\dfrac{2x^5}{x^3-3x+1}$;

в) $\sqrt[3]{x^2-x}+\sqrt{x}$; г) $\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

657. Пусть $x \to +\infty$. Выделить главный член вида $C\left(\dfrac{1}{x}\right)^n$ и определить порядки малости относительно бесконечно малой $\dfrac{1}{x}$ следующих функций:

а) $\dfrac{x+1}{x^4+1}$; б) $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$;

в) $\sqrt{x+2}-2\sqrt{x+1}+\sqrt{x}$; г) $\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}$.

658. Пусть $x \to 1$. Выделить главный член вида $C\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^n$ и определить порядки роста относительно бесконечно большой $\dfrac{1}{x-1}$ следующих функций:

а) $\dfrac{x^2}{x^2-1}$; б) $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$; в) $\dfrac{x}{\sqrt[3]{1-x^3}}$;

г) $\dfrac{1}{\sin \pi x}$; д) $\dfrac{\ln x}{(1-x)^2}$.

659. Пусть $x \to +\infty$ и $f_n(x) = x^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Доказать, что 1) каждая из функций $f_n(x)$ растет быстрее, чем предшествующая функция $f_{n-1}(x)$; 2) функция e^x растет быстрее, чем каждая из функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

660. Пусть $x \to +\infty$ и

$$f_n(x)=\sqrt[n]{x} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Доказать, что 1) каждая из функций $f_n(x)$ растет медленнее, чем предшествующая функция $f_{n-1}(x)$; 2) функция $f(x) = \ln x$ растет медленнее, чем каждая из функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

661. Доказать, что какова бы ни была последовательность функций

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x),\ \ldots\ (x_0 < x < +\infty),$$

можно построить функцию $f(x)$, которая при $x \to +\infty$ растет быстрее, чем каждая из функций $f_n(x)$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

§ 7. Непрерывность функции

1°. **Непрерывность функции.** Функция $f(x)$ называется *непрерывной* при $x = x_0$ (или в *точке* x_0), если

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (1)$$

т. е. если функция $f(x)$ определена при $x = x_0$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ для всех значений $f(x)$, имеющих смысл, выполнено неравенство

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Функция $f(x)$ называется *непрерывной на данном множестве* $X = \{x\}$ (интервале, сегменте и т. п.), если эта функция непрерывна в каждой точке множества X.

Если при некотором значении $x = x_0$, принадлежащем области определения $X = \{x\}$ функции $f(x)$ или являющемся предельной точкой этого множества, равенство (1) не выполнено (т. е. или (а) не существует число $f(x_0)$, иными словами, функция не определена в точке $x = x_0$, или (б) не существует $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, или (в) обе части формулы (1) имеют смысл, но равенство между ними не имеет места), то x_0 называется *точкой разрыва* функции $f(x)$.

Различают: 1) *точки* x_0 *разрыва первого рода*, для которых существуют конечные односторонние пределы:

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \text{ и } f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x)$$

и 2) *точки разрыва второго рода* — все остальные. Разность

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

называется *скачком функции* в точке x_0.

Если выполнено равенство

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0),$$

то точка разрыва x_0 называется *устранимой*. Если по меньшей мере один из пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ равен символу ∞, то x_0 называется точкой *бесконечного разрыва*.

Если выполнено равенство

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) \quad (\text{или } f(x_0 + 0) = f(x_0)),$$

то говорят, что функция $f(x_0)$ *непрерывна слева* (*справа*) в точке x_0. Для непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 необходимо и достаточно равенство трех чисел:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0).$$

2°. Непрерывность элементарных функций. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны при значении $x = x_0$, то функции

$$\text{а) } f(x) \pm g(x); \quad \text{б) } f(x)\,g(x); \quad \text{в) } \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x_0) \neq 0)$$

также непрерывны при $x = x_0$.

В частности: а) целая рациональная функция

$$P(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$$

непрерывна при любом значении x; б) дробная рациональная функция

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m}$$

непрерывна при всех значениях x, не обращающих знаменателя в нуль.

Вообще основные элементарные функции: x^n, $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, a^x, $\log_a x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, ... непрерывны во всех точках, где они определены.

Более общий результат следующий: если функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и функция $g(y)$ непрерывна при $y = f(x_0)$, то функция $g(f(x))$ непрерывна при $x = x_0$.

3°. Основные теоремы о непрерывных функциях. Если функция $f(x)$ непрерывна на конечном сегменте $[a, b]$, то: 1) $f(x)$ ограничена на этом сегменте; 2) достигает на нем своей нижней грани m и верхней грани M (*теорема Вейерштрасса*); 3) принимает на каждом интервале $(\alpha, \beta) \subset [a, b]$ все промежуточные значения между $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ (*теорема Коши*). В частности, если $f(\alpha)\,f(\beta) < 0$, то найдется значение γ $(\alpha < \gamma < \beta)$ такое, что $f(\gamma) = 0$.

662. Дан график непрерывной функции $y = f(x)$. Для данной точки a и числа $\varepsilon > 0$ указать геометрически число $\delta > 0$ такое, что $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

663. Требуется изготовить металлическую квадратную пластинку, сторона которой $x_0 = 10$ см. В каких пределах допустимо изменять сторону x этой пластинки, если площадь ее $y = x^2$ может отличаться от проектной $y_0 = 100$ см^2 не больше чем а) на $\pm$ 1 см^2; б) на $\pm$ 0,1 см^2; в) на $\pm$ 0,01 см^2; г) на $\pm\,\varepsilon$ см^2?

664. Ребро куба заключается между 2 м и 3 м. С какой абсолютной погрешностью Δ допустимо измерить ребро x этого куба, чтобы объем его y можно было вычислить с абсолютной погрешностью, не превышающей ε м^3, если: а) $\varepsilon = 0{,}1$ м^3; б) $\varepsilon = 0{,}01$ м^3; в) $\varepsilon = 0{,}001$ м^3?

665. В какой максимальной окрестности точки $x_0 = 100$ ордината графика функции $y = \sqrt{x}$ отличается от ординаты $y_0 = 10$ меньше чем на $\varepsilon = 10^{-n}$

($n \geqslant 0$)? Определить размеры этой окрестности при $n = 0, 1, 2, 3$.

666. С помощью «ε—δ»-рассуждений доказать, что функция $f(x) = x^2$ непрерывна при $x = 5$.

Заполнить следующую таблицу:

ε	1	0,1	0,01	0,001	...
δ					

667. Пусть $f(x) = \frac{1}{x}$ и $\varepsilon = 0{,}001$. Для значений $x_0 = 0{,}1;\ 0{,}01;\ 0{,}001; \ldots$ найти максимально большие положительные числа $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ такие, чтобы из неравенства $|x - x_0| < \delta$ вытекало бы неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Можно ли для данного $\varepsilon = 0{,}001$ выбрать такое $\delta > 0$, которое годилось бы для всех значений x_0 из интервала $(0,1)$, т. е. такое, что если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, каково бы ни было значение $x_0 \in (0,1)$?

668. Сформулировать на языке «ε—δ» в положительном смысле следующее утверждение: функция $f(x)$, определенная в точке x_0, не является непрерывной в этой точке.

669. Пусть для некоторых чисел $\varepsilon > 0$ можно найти соответствующие числа $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такие, что $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, если только $|x - x_0| < \delta$.

Можно ли утверждать, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, если: а) числа ε образуют конечное множество; б) числа ε образуют бесконечное множество двоичных дробей $\varepsilon = \frac{1}{2^n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

670. Пусть дана функция $f(x) = x + 0{,}001\,[x]$.

Показать, что для каждого $\varepsilon > 0{,}001$ можно подобрать $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$ такое, что $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$, если только $|x' - x| < \delta$, а для $0 < \varepsilon \leqslant 0{,}001$ для всех значений x этого сделать нельзя.

В каких точках нарушается непрерывность этой функции?

671. Пусть для каждого достаточно малого числа $\delta > 0$ существует $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ такое, что если

$|x-x_0| < \delta$, то выполнено неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$? Какое свойство функции $f(x)$ описывается данными неравенствами?

672. Пусть для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то $|x-x_0| < \delta$. Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при значении $x = x_0$? Какое свойство функции описывается этими неравенствами?

673. Пусть для каждого числа $\delta > 0$ существует число $\varepsilon = \varepsilon(\delta, x_0) > 0$ такое, что если $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, то $|x-x_0| < \delta$.

Следует ли отсюда, что функция $f(x)$ непрерывна при $x = x_0$? Какое свойство функции $f(x)$ описывается данными неравенствами?

Рассмотреть пример:

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{если } x \text{ рационально,} \\ \pi - \operatorname{arctg} x, & \text{если } x \text{ иррационально.} \end{cases}$$

674. С помощью «ε—δ»-рассуждений доказать непрерывность следующих функций: а) $ax + b$; б) x^2; в) x^3; г) $\sqrt{x}$; д) $\sqrt[3]{x}$; е) $\sin x$; ж) $\cos x$; з) $\operatorname{arctg} x$.

Исследовать на непрерывность и изобразить графически следующие функции:

675. $f(x) = |x|$.

676. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{если } x \neq 2; \\ A, & \text{если } x = 2. \end{cases}$

677. $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$, если $x \neq -1$ и $f(-1)$ — произвольно.

678. а) $f_1(x) = \left|\dfrac{\sin x}{|x|}\right|$, если $x \neq 0$ и $f_1(0) = 1$;

б) $f_2(x) = \dfrac{\sin x}{|x|}$, если $x \neq 0$ и $f_2(0) = 1$.

679. $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0)$ — произвольно.

680. $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$, если $x \neq 0$ и $f(0) = 0$.

681. $f(x)=e^{-1/x^2}$, если $x \neq 0$ и $f(0)=0$.

682. $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{1/x-1}}$, если $x\neq 1$ и $f(1)$ — произвольно.

683. $f(x)=x\ln x^2$, если $x\neq 0$ и $f(0)=a$.

684. $f(x)=\operatorname{sgn} x$. 685. $f(x)=[x]$.

686. $f(x)=\sqrt{x}-[\sqrt{x}]$.

Определить точки разрыва функций и исследовать характер этих точек, если:

687. $y=\dfrac{x}{(1+x)^2}$. 688. $y=\dfrac{1+x}{1+x^3}$.

689. $y=\dfrac{x^2-1}{x^3-3x+2}$. 690. $y=\dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}{\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}}$.

691. $y=\dfrac{x}{\sin x}$. 692. $y=\sqrt{\dfrac{1-\cos\pi x}{4-x^2}}$.

693. $y=\cos^2\dfrac{1}{x}$. 694. $y=\operatorname{sgn}\left(\sin\dfrac{\pi}{x}\right)$.

695. $y=\dfrac{\cos\frac{\pi}{x}}{\cos\frac{\pi}{x}}$. 696. $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$.

697. $y=\sqrt{x}\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x}$. 698. $y=e^{x+1/x}$.

699. $y=\dfrac{l}{\ln x}$. 700. $y=\dfrac{1}{1-e^{x/1-x}}$.

Исследовать на непрерывность и нарисовать эскизы графиков следующих функций:

701. $y=\operatorname{sgn}(\sin x)$. 702. $y=x-[x]$.

703. $y=x[x]$. 704. $y=[x]\sin\pi x$.

705. $y=x^2-[x^2]$. 706. $x=\left[\dfrac{1}{x}\right]$.

707. $y=x\left[\dfrac{1}{x}\right]$. 708. $y=\operatorname{sgn}\left(\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

709. $y=\left[\frac{1}{x^2}\right]\operatorname{sgn}\left(\sin\frac{\pi}{x}\right)$. 710. $y=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{x}$.

711. $y=\sec^2\frac{1}{x}$. 712. $y=(-1)^{[x^2]}$.

713. $y=\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}\right)$.

714. $y=\frac{1}{x^2\sin^2 x}$. 715. $y=\frac{1}{\sin(x^2)}$.

716. $y=\ln\frac{x^2}{(x+1)(x-3)}$. 717. $y=e^{-1/x}$.

718. $y=1-e^{-1/x^2}$. 719. $y=\operatorname{th}\frac{2x}{1-x^2}$.

Исследовать на непрерывность и построить графики следующих функций:

720. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{1+x^n}\ (x\geqslant 0)$. 721. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^x-n^{-x}}{n^x+n^{-x}}$.

722. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^{2n}}$. 723. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\cos^{2n}x$.

724. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x}{1+(2\sin x)^{2n}}$.

725. $y=\lim\limits_{n\to\infty}[x\operatorname{arctg}(n\operatorname{ctg}x)]$.

726. $y=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x+x^2e^{nx}}{1+e^{nx}}$.

727. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln(1+e^{xt})}{\ln(1+e^t)}$.

728. $y=\lim\limits_{t\to+\infty}(1+x)\operatorname{th}tx$.

729. Является ли непрерывной функция

$$f(x)=\begin{cases}2x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 2-x, & \text{если } 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

730. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}e^x, & \text{если } x<0,\\ a+x, & \text{если } x\geqslant 0.\end{cases}$$

При каком выборе числа a функция $f(x)$ будет непрерывной?

731. Исследовать следующие функции на непрерывность и выяснить характер точек разрыва, если:

а) $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 2-x & \text{при } 1 < x \leqslant 2; \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} x \text{ при } |x| \leqslant 1, \\ 1 \text{ при } |x| > 1; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} \cos\dfrac{\pi x}{2} & \text{при } |x| \leqslant 1, \\ |x-1| & \text{при } |x| > 1; \end{cases}$

г) $f(x)=\begin{cases} \operatorname{ctg}^2 \pi x & \text{для нецелого } x, \\ 0 & \text{для целого } x; \end{cases}$

д) $f(x)=\begin{cases} \sin \pi x & \text{для рационального } x, \\ 0 & \text{для иррационального } x. \end{cases}$

732. Функция $d = d(x)$ представляет собой кратчайшее расстояние точки x числовой оси Ox от множества точек ее, состоящего из отрезков $0 \leqslant x \leqslant 1$ и $2 \leqslant x \leqslant 3$. Найти аналитическое выражение функции d, построить ее график и исследовать на непрерывность.

733. Фигура E состоит из равнобедренного треугольника с основанием 1 и высотой 1 и двух прямоугольников с основаниями 1 каждый и высотами, равными 2 и 3 (рис. 5). Функция $S = S(y)$ $(0 \leqslant y < +\infty)$ представляет собой площадь части фигуры E, заключенной между параллелями $Y = 0$ и $Y = y$; а функция $b = b(y)$ $(0 \leqslant y < +\infty)$ есть длина сечения фигуры E параллелью $Y = y$. Найти аналитические выражения функций S и b, построить их графики и исследовать на непрерывность.

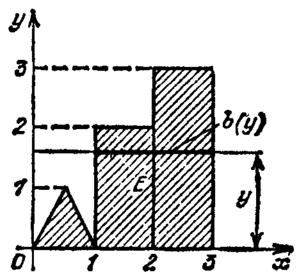

Рис. 5

734. Доказать, что функция Дирихле

$$\chi(x) = \lim_{m\to\infty} \left\{ \lim_{n\to\infty} \cos^n (\pi m! x) \right\}$$

разрывна при каждом значении x.

735. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = x\chi(x),$$

где $\chi(x)$ — функция Дирихле (см. предыдущую задачу). Построить эскиз графика этой функции.

736. Доказать, что функция Римана

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & \text{если } x = \dfrac{m}{n}, \text{ где } m \text{ и } n \text{ взаимно} \\ & \text{простые числа;} \\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,} \end{cases}$$

разрывна при каждом рациональном значении x и непрерывна при каждом иррациональном значении x. Построить эскиз графика этой функции.

737. Исследовать на непрерывность функцию $f(x)$, заданную следующим образом:

$$f(x) = \frac{nx}{n+1},$$

если x есть несократимая рациональная дробь $\frac{m}{n}$ $(n \geqslant 1)$, и

$$f(x) = |x|,$$

если x — иррациональное число. Построить эскиз графика этой функции.

738. Функция $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$ определена для всех значений аргумента x, кроме $x = 0$. Какое значение следует приписать функции $f(x)$ в точке $x = 0$, чтобы эта функция была непрерывной при $x = 0$?

739. Показать, что при любом выборе числа $f(1)$ функция $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ будет разрывна при $x = 1$.

740. Функция $f(x)$ теряет смысл при $x = 0$. Определить число $f(0)$ так, чтобы $f(x)$ была непрерывна при $x = 0$, если:

а) $f(x) = \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt[3]{1+x}-1}$; б) $f(x) = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{x}$;

в) $f(x) = \sin x \sin \dfrac{1}{x}$; г) $f(x) = (1+x)^{1/x}$;

д) $f(x)=\frac{1}{x^2}e^{-1/x^2}$; е) $f(x)=x^x$ $(x>0)$;

ж) $f(x)=x\ln^2 x$.

741. Обязательно ли будет разрывна в данной точке x_0 сумма двух функций $f(x)+g(x)$, если: а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна при $x=x_0$; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны при $x=x_0$? Построить соответствующие примеры.

742. Обязательно ли произведение двух функций $f(x)\,g(x)$ терпит разрыв непрерывности в данной точке x_0, если: а) функция $f(x)$ непрерывна, а функция $g(x)$ разрывна в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ разрывны при $x=x_0$? Построить соответствующие примеры.

743. Можно ли утверждать, что квадрат разрывной функции есть также разрывная функция?

Построить пример всюду разрывной функции, квадрат которой есть функция непрерывная.

744. Исследовать на непрерывность функции $f[g(x)]$ и $g[f(x)]$, если:

а) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ и $g(x)=1+x^2$;

б) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ и $g(x)=x(1-x^2)$;

в) $f(x)=\operatorname{sgn} x$ и $g(x)=1+x-[x]$.

745. Исследовать на непрерывность сложную функцию $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, если

$$f(u)=\begin{cases} u & \text{при } 0<u\leqslant 1;\\ 2-u & \text{при } 1<u<2\end{cases}$$

и

$$\varphi(x)=\begin{cases} x & \text{при } x \text{ рациональном;}\\ 2-x & \text{при } x \text{ иррациональном}\end{cases}\qquad (0<x<1).$$

746. Доказать, что если $f(x)$ — непрерывная функция, то $F(x)=|f(x)|$ есть также непрерывная функция.

747. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна, то функция

$$f_c(x)=\begin{cases} -c, & \text{если } f(x)<-c;\\ f(x), & \text{если } |f(x)|\leqslant c;\\ c, & \text{если } f(x)>c,\end{cases}$$

где c — любое положительное число, также непрерывна.

748. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$, то функции

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi \leqslant x} \{f(\xi)\} \text{ и } M(x) = \sup_{a \leqslant \xi \leqslant x} \{f(\xi)\}$$

также непрерывны на $[a, b]$.

749. Доказать, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны, то функции

$$\varphi(x) = \min [f(x), g(x)] \text{ и } \psi(x) = \max [f(x), g(x)]$$

также непрерывны.

750. Пусть функция $f(x)$ определена и ограничена на сегменте $[a, b]$. Доказать, что функции

$$m(x) = \inf_{a \leqslant \xi < x} \{(f(\xi)\} \text{ и } M(x) = \sup_{a \leqslant \xi < x} \{f(\xi)\}$$

непрерывны слева на сегменте $[a, b]$.

751. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $a \leqslant x < +\infty$ и существует конечный $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, то эта функция ограничена в данном промежутке.

752. Пусть функция $f(x)$ непрерывна и ограничена в интервале $(x_0, +\infty)$. Доказать, что, каково бы ни было число T, найдется последовательность $x_n \to +\infty$ такая, что

$$\lim_{n \to \infty} [f(x_n + T) - f(x_n)] = 0.$$

753. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — непрерывные периодические функции, определенные при $-\infty < x < +\infty$ и

$$\lim_{x \to +\infty} [\varphi(x) - \psi(x)] = 0.$$

Доказать, что $\varphi(x) \equiv \psi(x)$.

754. Доказать, что все точки разрыва ограниченной монотонной функции являются точками разрыва 1-го рода.

755. Доказать, что если функция $f(x)$ обладает следующими свойствами: 1) определена и монотонна на сегменте $[a, b]$; 2) в качестве своих значений принимает все числа между $f(a)$ и $f(b)$, то эта функция непрерывна на $[a, b]$.

756. Показать, что функция $f(x) = \sin \dfrac{1}{x-a}$, если $x \neq a$ и $f(a) = 0$, принимает на любом сегменте $[a, b]$

все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$, однако не является непрерывной на $[a, b]$.

757. Доказать, что если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (a, b) и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — любые значения из этого интервала, то между ними найдется число ξ такое, что

$$f(\xi)=\frac{1}{n}[f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_n)].$$

758. Пусть $f(x)$ непрерывна в интервале (a, b) и

$$l=\varliminf_{x\to a} f(x) \text{ и } L=\varlimsup_{x\to a} f(x).$$

Доказать, что, каково бы ни было число λ, где $l\leqslant\lambda\leqslant L$, существует последовательность $x_n\to a$ $(n=1, 2, \ldots)$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lambda.$$

§ 8. Обратная функция. Функции, заданные параметрически

1°. Существование и непрерывность обратной функции. Если функция $y=f(x)$ обладает следующими свойствами: 1) определена и непрерывна на интервале (a, b); 2) монотонна в строгом смысле на этом интервале, то существует однозначная обратная функция $x=f^{-1}(y)$, определенная, непрерывная и соответственно монотонная в строгом смысле на интервале (A, B), где $A=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$ и $B=\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

Под *однозначной непрерывной ветвью* многозначной обратной функции данной непрерывной функции $y=f(x)$ понимается любая однозначная непрерывная функция $x=g(y)$, определенная в максимальной области ее существования и удовлетворяющая в этой области уравнению $f[g(y)]=y$.

2°. Непрерывность функции, заданной параметрически. Если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ определены и непрерывны в интервале (α, β) и функция $\varphi(t)$ строго монотонна на этом интервале, то система уравнений

$$x=\varphi(t),\quad y=\psi(t)$$

определяет y как однозначную непрерывную функцию от x:

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x)),$$

на интервале (a, b), где $a=\lim\limits_{t\to\alpha+0}\varphi(t)$ и $b=\lim\limits_{t\to\beta-0}\varphi(t)$.

759. Найти обратную функцию дробно-линейной функции

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq 0).$$

В каком случае обратная функция совпадает с данной?

760. Найти обратную функцию $x = x(y)$, если

$$y = x + [x].$$

761. Показать, что существует единственная непрерывная функция $y = y(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая *уравнению Кеплера*

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \leqslant \varepsilon < 1).$$

762. Показать, что уравнение $\operatorname{ctg} x = kx$ для каждого вещественного k $(-\infty < k < +\infty)$ имеет в интервале $0 < x < \pi$ единственный непрерывный корень $x = x(k)$.

763. Может ли немонотонная функция $y = f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ иметь однозначную обратную функцию? Рассмотреть пример:

$$y=\begin{cases} x, & \text{если } x \text{ рационально;}\\ -x, & \text{если } x \text{ иррационально.}\end{cases}$$

764. В каком случае функция $y = f(x)$ и обратная функция $x = f^{-1}(y)$ представляют одну и ту же функцию?

765. Показать, что обратная функция разрывной функции $y = (1 + x^2)\operatorname{sgn} x$ есть функция непрерывная.

766. Доказать, что если функция $f(x)$ определена и строго монотонна на сегменте $[a, b]$ и

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a) \qquad (a \leqslant x_n \leqslant b),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Определить однозначные непрерывные ветви обратных функций для следующих функций:

767. $y = x^2$. **768.** $y = 2x - x^2$. **769.** $y = \frac{2x}{1+x^2}$.

770. $y = \sin x$. **771.** $y = \cos x$. **772.** $y = \operatorname{tg} x$.

773. Показать, что множество значений непрерывной функции $y = 1 + \sin x$, соответствующих интервалу $(0 < x < 2\pi)$, есть сегмент.

774. Доказать равенство

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}.$$

775. Доказать равенство

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x \qquad (x \neq 0).$$

776. Доказать теорему сложения арктангенсов:

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy} + \varepsilon\pi,$$

где $\varepsilon = \varepsilon(x, y)$ — функция, принимающая одно из трех значений: 0, 1, — 1.

Для каких значений y при данном значении x возможен разрыв функции ε? Построить на плоскости Oxy соответствующие области непрерывности функции ε и определить значение этой функции в полученных областях.

777. Доказать теорему сложения арксинусов:

$$\arcsin x + \arcsin y =$$
$$= (-1)^{\varepsilon} \arcsin\left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right) + \varepsilon\pi$$
$$(|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1),$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, \text{ если } xy \leqslant 0 \text{ или } x^2 + y^2 \leqslant 1, \\ \operatorname{sgn} x, \text{ если } xy > 0 \text{ и } x^2 + y^2 > 1. \end{cases}$$

778. Доказать теорему сложения арккосинусов:

$$\arccos x + \arccos y =$$
$$= (-1) \arccos\left(xy - \sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\right) + 2\pi\varepsilon$$
$$(|x| \leqslant 1,\ |y| \leqslant 1),$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, \text{ если } x + y \geqslant 0, \\ 1, \text{ если } x + y < 0. \end{cases}$$

779. Построить графики функций:

а) $y = \arcsin x - \arcsin\sqrt{1-x^2}$;

б) $y = \arcsin\left(2x\sqrt{1-x^2}\right) - 2\arcsin x$.

780. Найти функцию $y = y(x)$, заданную уравнениями:

$$x = \operatorname{arctg} t,\ y = \operatorname{arcctg} t \ (-\infty < t < +\infty).$$

В какой области определена эта функция?

781. Пусть $x = \operatorname{ch} t$, $y = \operatorname{sh} t$ $(-\infty < t < +\infty)$. В каких областях изменения параметра t переменную y можно рассматривать как однозначную функцию от переменной x? Найти выражения y для различных областей.

782. Каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы система уравнений $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(\alpha < t < \beta)$ определяла бы y как однозначную функцию от x?

Рассмотреть пример: $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.

783. При каких условиях две системы уравнений

$$x = \varphi(t),\ y = \psi(t) \qquad (a < t < b)$$

и

$$x = \varphi(\chi(\tau)),\ y = \psi(\chi(\tau)) \ (\alpha < \tau < \beta)$$

определяют одну и ту же функцию $y = y(x)$?

784. Пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены и непрерывны на интервале (a, b) и $A = \inf\limits_{a<x<b} \varphi(x)$, $B = \sup\limits_{a<x<b} \varphi(x)$. В каком случае существует однозначная функция $f(x)$, определенная в интервале (A, B) и такая, что

$$\psi(x) = f(\varphi(x)) \text{ при } a < x < b?$$

§ 9. Равномерная непрерывность функции

1°. Определение равномерной непрерывности. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на данном множестве (интервале, сегменте и т. п.) $X = \{x\}$, если $f(x)$ определена на X и для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для любых значений $x', x'' \in X$ из неравенства

$$|x' - x''| < \delta$$

следует неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

2°. Теорема Кантора. Функция $f(x)$, определенная и непрерывная на ограниченном сегменте $[a, b]$, равномерно непрерывна на этом сегменте.

785. Цех завода вырабатывает квадратные пластинки, стороны которых x могут принимать значения в пределах от 1 до 10 см. С каким допуском δ можно обрабатывать стороны этих пластинок, чтобы независимо от их длины (в указанных границах) площадь их y отличалась от проектной меньше, чем на ε? Произвести численный расчет, если:

а) $\varepsilon = 1$ см^2; б) $\varepsilon = 0{,}01$ см^2; в) $\varepsilon = 0{,}0001$ см^2.

786. Цилиндрическая муфта, ширина которой ε и длина δ, надета на кривую $y = \sqrt[3]{x}$ и скользит по ней так, что ось муфты остается параллельной оси Ox. Чему должно быть равно δ, чтобы эта муфта свободно прошла участок кривой, определяемый неравенством $-10 \leqslant x \leqslant 10$, если: а) $\varepsilon = 1$; б) $\varepsilon = 0{,}1$; в) $\varepsilon = 0{,}01$; г) ε произвольно мало?

787. В положительном смысле сформулировать на языке «ε—δ» утверждение: функция $f(x)$ непрерывна на некотором множестве (интервале, сегменте и т. п.), но не является равномерно непрерывной на этом множестве.

788. Показать, что функция $f(x) = 1/x$ непрерывна в интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

789. Показать, что функция $f(x) = \sin \pi/x$ непрерывна и ограничена в интервале $(0, 1)$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

790. Показать, что функция $f(x) = \sin x^2$ непрерывна и ограничена в бесконечном интервале $-\infty < x < +\infty$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

791. Доказать, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна в области $a \leqslant x < +\infty$ и существует конечный

$$\lim_{x \to +\infty} f(x),$$

то $f(x)$ равномерно непрерывна в этой области.

792. Показать, что неограниченная функция

$$f(x) = x + \sin x$$

равномерно непрерывна на всей оси $-\infty < x < +\infty$.

793. Является ли равномерно непрерывной функция $f(x) = x^2$ на интервале а) $(-l, l)$, где l — любое, сколько угодно большое положительное число; б) на интервале $(-\infty, +\infty)$?

Исследовать на равномерную непрерывность в заданных областях следующие функции:

794. $f(x)=\frac{x}{4-x^2}$ $\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$.

795. $f(x)=\ln x$ $\quad(0<x<1)$.

796. $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ $\quad(0<x<\pi)$.

797. $f(x)=e^x\cos\frac{1}{x}$ $\quad(0<x<1)$.

798. $f(x)=\operatorname{arctg} x$ $\quad(-\infty<x<+\infty)$.

799. $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad(1\leqslant x<+\infty)$.

800. $f(x)=x\sin x$ $\quad(0\leqslant x<+\infty)$.

801. Показать, что функция $f(x)=\frac{|\sin x|}{x}$ равномерно непрерывна на каждом интервале

$$J_1=(-1<x<0) \text{ и } J_2=(0<x<1)$$

по отдельности, но не является равномерно непрерывной на их сумме

$$J_1+J_2=\{0<|x|<1\}.$$

801.1. Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на каждом из сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$, то эта функция является равномерно непрерывной на суммарном сегменте $[a, b]$.

802. Для $\varepsilon>0$ найти $\delta=\delta(\varepsilon)$ (какое-нибудь!), удовлетворяющее условиям равномерной непрерывности для функции $f(x)$ на данном промежутке, если:

а) $f(x)=5x-3$ $\quad(-\infty<x<+\infty)$;

б) $f(x)=x^2-2x-1$ $\quad(-2\leqslant x\leqslant 5)$.

в) $f(x)=\frac{1}{x}$ $\quad(0{,}1\leqslant x\leqslant 1)$;

г) $f(x)=\sqrt{x}$ $\quad(0\leqslant x<+\infty)$;

д) $f(x)=2\sin x-\cos x$ $\quad(-\infty<x<+\infty)$;

е) $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ $(x\neq 0)$ и $f(0)=0$ $\quad(0\leqslant x\leqslant\pi)$.

803. На сколько равных между собой отрезков достаточно разбить сегмент $[1, 10]$, чтобы колебание функции $f(x) = x^2$ на каждом из этих отрезков было меньше 0,0001?

804. Доказать, что сумма и произведение ограниченного числа равномерно непрерывных на интервале (a, b) функций равномерно непрерывны на этом интервале.

805. Доказать, что если ограниченная монотонная функция $f(x)$ непрерывна на конечном или бесконечном интервале (a, b), то эта функция равномерно непрерывна на интервале (a, b).

806 (н). Доказать, что если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на конечном интервале (a, b), то существуют пределы

$$A = \lim_{x\to a+0} f(x) \quad \text{и} \quad B = \lim_{x\to b-0} f(x).$$

Верна ли эта теорема для бесконечного интервала (a, b)?

806.1. Доказать что для того, чтобы функцию $f(x)$, определенную и непрерывную на конечном интервале (a, b), можно было продолжить непрерывным образом на сегмент $[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ была равномерно непрерывна на интервале (a, b).

807. *Модулем непрерывности* функции $f(x)$ на промежутке (a, b) называется функция

$$\omega_f(\delta) = \sup |f(x_1) - f(x_2)|,$$

где x_1 и x_2 — любые точки из (a, b), связанные условием $|x_1 - x_2| \leqslant \delta$.

Доказать, что для равномерной непрерывности функции $f(x)$ на промежутке (a, b) необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{\delta\to+0} \omega_f(\delta) = 0.$$

808. Получить оценку модуля непрерывности $\omega_f(\delta)$ (см. предыдущую задачу) вида

$$\omega_f(\delta) \leqslant C\delta^{\alpha},$$

где C и α — константы, если:

а) $f(x) = x^3$ $\quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$;

б) $f(x) = \sqrt{x}$ $\quad (0 \leqslant x \leqslant a)$ и $(a < x < +\infty)$,

в) $f(x) = \sin x + \cos x$ $\quad (0 \leqslant x \leqslant 2\pi)$.

§ 10. Функциональные уравнения

809. Доказать, что единственная непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех вещественных значений x и y уравнению

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \tag{1}$$

есть линейная однородная $f(x) = ax$, где $a = f(1)$ — произвольная константа.

810. Доказать, что монотонная функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению (1), есть линейная однородная.

811. Доказать, что функция $f(x)$, удовлетворяющая уравнению (1) и ограниченная в сколь угодно малом интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, есть линейная однородная.

812. Доказать, что единственная не равная нулю тождественно непрерывная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех значений x и y уравнению

$$f(x+y) = f(x)\,f(y), \tag{2}$$

есть показательная $f(x) = a^x$, где $a = f(1)$ — положительная постоянная.

813. Доказать, что не равная нулю тождественно функция $f(x)$, ограниченная в интервале $(0, \varepsilon)$ и удовлетворяющая уравнению (2), есть показательная.

814. Доказать, что единственная не равная нулю тождественно непрерывная функция $f(x)$ $(0 < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех положительных значений x и y уравнению

$$f(xy) = f(x) + f(y),$$

есть логарифмическая $f(x) = \log_a x$, где a — положительная константа $(a \neq 1)$.

815. Доказать, что единственная не равная нулю тождественно непрерывная функция $f(x)$ $(0 < x < +\infty)$, удовлетворяющая для всех положительных значений x и y уравнению

$$f(xy) = f(x)\,f(y), \tag{3}$$

есть степенная $f(x) = x^a$, где a — постоянная.

816. Найти все непрерывные функции $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющие для всех вещественных значений x и y уравнению (3).

817. Показать, что разрывная функция $f(x) = \operatorname{sgn} x$ удовлетворяет уравнению (3).

818. Найти все непрерывные функции $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющие для всех вещественных значений x и y уравнению

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y).$$

819. Найти все непрерывные ограниченные функции $f(x)$ и $g(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющие для всех вещественных значений x и y системе уравнений:

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y),$$
$$g(x+y) = f(x)g(y) + f(y)g(x),$$

и, сверх того, условиям нормировки:

$$f(0) = 1 \text{ и } g(0) = 0.$$

Указание. Рассмотреть функцию

$$F(x) = f^2(x) + g^2(x).$$

820. Пусть $\Delta f(x) = f(x+\Delta x) - f(x)$ и $\Delta^2 f(x) = \Delta\{\Delta f(x)\}$ суть конечные разности функции $f(x)$ соответственно первого и второго порядков.

Доказать, что если функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ непрерывная и $\Delta^2 f(x) \equiv 0$, то эта функция линейная, т. е. $f(x) = ax + b$, где a и b — постоянные.

ОТДЕЛ II

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

§ 1. Производная явной функции

1°. **Определение производной.** Если x и $x_1 = x + \Delta x$ — значения независимой переменной, то разность

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$$

называется *приращением* функции $y = f(x)$ на сегменте $[x, x_1]$.

Выражение

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \tag{1}$$

если оно имеет смысл, носит название *производной*, а сама функция $f(x)$ в этом случае называется *дифференцируемой*.

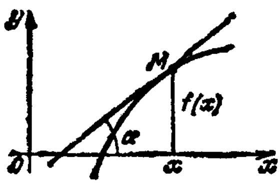

Рис. 6

Геометрически число $f'(x)$ представляет собой угловой коэффициент касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке его x ($\operatorname{tg}\alpha = f'(x)$) (рис. 6).

2°. **Основные правила нахождения производной.** Если c — постоянная величина и функции $u = u(x)$, $v = v(x)$, $w = w(x)$ имеют производные, то

1) $c' = 0$;
2) $(cu)' = cu'$;
3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$;
4) $(uv)' = u'v + v'u$;
5) $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$;
6) $(u^n)' = nu^{n-1}u'$ (n — постоянное число);
7) если функции $y = f(u)$ и $u = \varphi(x)$ имеют производные, то

$$y'_x = y'_u u'_x.$$

3°. Основные формулы. Если x — независимая переменная, то

I. $(x^n)' = nx^{n-1}$ (n — постоянное число).

II. $(\sin x)' = \cos x$. III. $(\cos x)' = -\sin x$.

IV. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. V. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

VI. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VII. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

VIII. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$. IX. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

X. $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$.

XI. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$ $(a > 0)$;

$$(\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (a > 0,\ a \neq 1;\quad x > 0).$$

XII. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$. XIII. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

XIV. $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$. XV. $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$.

4°. Односторонние производные. Выражения

$$f'_-(x) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

и

$$f'_+(x) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

называются соответственно *левой* или *правой производной* функции $f(x)$ в точке x.

Для существования производной $f'(x)$ необходимо и достаточно, чтобы

$$f'_-(x) = f'_+(x).$$

5°. Бесконечная производная. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x и

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \infty,$$

то говорят, что в точке x функция $f(x)$ имеет *бесконечную производную*. В этом случае касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке x перпендикулярна к оси Ox.

821. Определить приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y = \lg x$, если x изменяется от 1 до 1000.

822. Определить приращение Δx аргумента x и соответствующее приращение Δy функции $y = 1/x^2$, если x изменяется от 0,01 до 0,001.

823. Переменная x получает приращение Δx. Определить приращение Δy, если:

а) $y=ax+b$; б) $y=ax^2+bx+c$; в) $y=a^x$.

824. Доказать, что:

а) $\Delta[f(x)+g(x)] = \Delta f(x) + \Delta g(x)$;

б) $\Delta[f(x)g(x)] = g(x+\Delta x)\,\Delta f(x) + f(x)\,\Delta g(x)$.

825. Через точки $A(2, 4)$ и $A'(2+\Delta x,\ 4+\Delta y)$ кривой $y = x^2$ проведена секущая AA'. Найти угловой коэффициент этой секущей, если: а) $\Delta x = 1$; б) $\Delta x = 0{,}1$; в) $\Delta x = 0{,}01$; г) Δx произвольно мало.

Чему равен угловой коэффициент касательной к данной кривой в точке A?

826. Отрезок $1 \leqslant x \leqslant 1+h$ оси Ox с помощью функции $y = x^3$ отображается на ось Oy. Определить средний коэффициент растяжения и произвести численный расчет, если: а) $h = 0{,}1$; б) $h = 0{,}01$; в) $h = 0{,}001$.

Чему равен коэффициент растяжения при этом отображении в точке $x = 1$?

827. Закон движения точки по оси Ox дается формулой

$$x = 10t + 5t^2,$$

где t — время в секундах и x — расстояние в метрах. Найти среднюю скорость движения за промежуток времени $20 \leqslant t \leqslant 20+\Delta t$ и произвести численный расчет, если: а) $\Delta t = 1$; б) $\Delta t = 0{,}1$; в) $\Delta t = 0{,}01$. Чему равна скорость движения в момент времени $t = 20$?

828. Исходя из определения производной, непосредственно найти производные следующих функций:

а) x^2; б) x^3; в) $\frac{1}{x}$; г) $\sqrt{x}$; д) $\sqrt[3]{x}$; е) $\operatorname{tg} x$; ж) $\operatorname{ctg} x$; з) $\arcsin x$; и) $\arccos x$; к) $\operatorname{arctg} x$.

829. Найти $f'(1)$, $f'(2)$ и $f'(3)$, если

$$f(x) = (x-1)(x-2)^2(x-3)^3.$$

830. Найти $f'(2)$, если $f(x) = x^2\sin(x-2)$.

831. Найти $f'(1)$, если

$$f(x) = x + (x-1)\arcsin\sqrt{\frac{x}{x+1}}.$$

832. Найти $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$, если функция $f(x)$ дифференцируема в точке a.

833. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема и n — натуральное число, то

$$\lim_{n\to\infty} n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right] = f'(x). \qquad (1)$$

Обратно, если для функции $f(x)$ существует предел (1), то можно ли утверждать, что эта функция имеет производную? Рассмотреть пример функции Дирихле (см. отд. 1, задачу 734).

Пользуясь таблицей производных, найти производные следующих функций:

834. $y = 2 + x - x^2$.

Чему равно $y'(0)$; $y'\left(\frac{1}{2}\right)$; $y'(1)$; $y'(-10)$?

835. $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$.

При каких значениях x: а) $y'(x) = 0$; б) $y'(x) = -2$; в) $y'(x) = 10$?

836. $y = a^5 + 5a^3x^2 - x^5$. **837.** $y = \frac{ax+b}{a+b}$.

838. $y = (x-a)(x-b)$.

839. $y = (x+1)(x+2)^2(x+3)^3$.

840. $y = (x\sin\alpha + \cos\alpha)(x\cos\alpha - \sin\alpha)$.

841. $y = (1+nx^m)(1+mx^n)$.

842. $y = (1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3$.

842.1. $y = (5+2x)^{10}(3-4x)^{20}$.

843. $y = \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$.

844. Доказать формулу $\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$.

Найти производные функций:

845. $y=\dfrac{2x}{1-x^2}$. **846.** $y=\dfrac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$.

847. $y=\dfrac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$.

848. $y=\dfrac{(2-x^2)(2-x^3)}{(1-x)^2}$.

849. $y=\dfrac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$. **850.** $y=\dfrac{x^p(1-x)^q}{1+x}$.

851. $y=x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$.

852. $y=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$.

853. $y=\sqrt[3]{x^2}-\dfrac{2}{\sqrt{x}}$. **854.** $y=x\sqrt{1+x^2}$.

855. $y=(1+x)\sqrt{2+x^2}\,\sqrt[3]{3+x^3}$.

856. $y=\sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$.

857. $y=\dfrac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

858. $y=\sqrt[3]{\dfrac{1+x^3}{1-x^3}}$.

859. $y=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}$.

860. $y=\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}$.

861. $y=\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$.

862. $y=\cos 2x-2\sin x$.

863. $y=(2-x^2)\cos x+2x\sin x$.

864. $y=\sin(\cos^2 x)\cdot\cos(\sin^2 x)$.

865. $y=\sin^n x\cos nx$. **866.** $y=\sin[\sin(\sin x)]$.

867. $y=\dfrac{\sin^2 x}{\sin x^2}$. **868.** $y=\dfrac{\cos x}{2\sin^2 x}$.

869. $y=\dfrac{1}{\cos^n x}$. **870.** $y=\dfrac{\sin x-x\cos x}{\cos x+x\sin x}$.

871. $y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$.

872. $y=\operatorname{tg} x-\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x+\frac{1}{5}\operatorname{tg}^5 x$.

873. $y=4\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^2 x}+\sqrt[3]{\operatorname{ctg}^8 x}$.

874. $y=\sec^2\frac{x}{a}+\operatorname{cosec}^2\frac{x}{a}$.

875. $y=\sin[\cos^2(\operatorname{tg}^3 x)]$. 876. $y=e^{-x^2}$.

877. $y=2^{\operatorname{tg} 1/x}$. 878. $y=e^x(x^2-2x+2)$.

879. $y=\left[\frac{1-x^2}{2}\sin x-\frac{(1-x)^2}{2}\cos x\right]e^{-x}$.

880. $y=e^x\left(1+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right)$.

881. $y=\frac{\ln 3\cdot\sin x+\cos x}{3^x}$.

882. $y=e^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

883. $y=e^x+e^{e^x}+e^{e^{e^x}}$.

884. $y=\left(\frac{a}{b}\right)^x\left(\frac{b}{x}\right)^a\left(\frac{x}{a}\right)^b$ $(a>0,\ b>0)$.

885. $y=x^{a^a}+a^{x^a}+a^{a^x}$ $(a>0)$. 886. $y=\lg^3 x^2$.

887. $y=\ln(\ln(\ln x))$. 888. $y=\ln(\ln^2(\ln^3 x))$.

889. $y=\frac{1}{2}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2(1+x)}$.

890. $y=\frac{1}{4}\ln\frac{x^2-1}{x^2+1}$.

891. $y=\frac{1}{4(1+x^4)}+\frac{1}{4}\ln\frac{x^4}{1+x^4}$.

892. $y=\frac{1}{2\sqrt{6}}\ln\frac{x\sqrt{3}-\sqrt{2}}{x\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

893. $y=\frac{1}{1-k}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{\sqrt{k}}{1-k}\ln\frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}}$ $(0<k<1)$.

894. $y=\sqrt{x+1}-\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$.

895. $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

896. $y=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}$.

897. $y=x\ln^2\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-$
$$-2\sqrt{1+x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+2x.$$

898. $y=\frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)$.

899. $y=\frac{1}{2\sqrt{ab}}\ln\frac{\sqrt{a}+x\sqrt{b}}{\sqrt{a}-x\sqrt{b}}$ $(a>0,\ b>0)$.

900. $y=\frac{2+3x^2}{x^4}\sqrt{1-x^2}+3\ln\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$.

901. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. 902. $y=\ln\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$.

903. $y=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}^2 x+\ln\sin x$.

904. $y=\ln\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$.

905. $y=-\frac{\cos x}{2\sin^2 x}+\ln\sqrt{\frac{1+\cos x}{\sin x}}$.

906. $y=\ln\frac{b+a\cos x+\sqrt{b^2-a^2}\sin x}{a+b\cos x}$
$(0\leqslant|a|<|b|)$.

907. $y=\frac{1}{x}(\ln^3 x+3\ln^2 x+6\ln x+6)$.

908. $y=\frac{1}{4x^4}\ln\frac{1}{x}-\frac{1}{16x^4}$.

909. $y=\frac{3}{2}\left(1-\sqrt[3]{1+x^2}\right)+3\ln\left(1+\sqrt[3]{1+x^2}\right)$.

910. $y=\ln\left[\frac{1}{x}+\ln\left(\frac{1}{x}+\ln\frac{1}{x}\right)\right]$.

911. $y=x[\sin(\ln x)-\cos(\ln x)]$.

912. $y=\ln\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\cos x\cdot\ln\operatorname{tg}x$.

913. $y=\arcsin\frac{x}{2}$.

914. $y=\arccos\frac{1-x}{\sqrt{2}}$. **915.** $y=\operatorname{arctg}\frac{x^2}{a}$.

916. $y=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{2}}{x}$. **917.** $y=\sqrt{x}-\operatorname{arctg}\sqrt{x}$.

918. $y=x+\sqrt{1-x^2}\cdot\arccos x$.

919. $y=x\arcsin\sqrt{\frac{x}{1+x}}+\operatorname{arctg}\sqrt{x}-\sqrt{x}$.

920. $y=\arccos\frac{1}{x}$. **921.** $y=\arcsin(\sin x)$.

922. $y=\arccos(\cos^2 x)$. **923.** $y=\arcsin(\sin x-\cos x)$.

924. $y=\arccos\sqrt{1-x^2}$. **925.** $y=\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$.

926. $y=\operatorname{arcctg}\left(\frac{\sin x+\cos x}{\sin x-\cos x}\right)$.

927. $y=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)$ $(a>b\geqslant 0)$

928. $y=\arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2}$. **929.** $y=\frac{1}{\arccos^2(x^2)}$.

930. $y=\operatorname{arctg}x+\frac{1}{3}\operatorname{arctg}(x^3)$.

931. $y=\ln(1+\sin^2 x)-2\sin x\cdot\operatorname{arctg}(\sin x)$.

932. $y=\ln\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$.

933. $y=\ln\frac{x+a}{\sqrt{x^2+b^2}}+\frac{a}{b}\operatorname{arctg}\frac{x}{b}$ $(b\neq 0)$.

934. $y=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}$ $(a>0)$.

935. $y=\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{2x-1}{\sqrt{3}}$.

936. $y=\frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\frac{x^2+x\sqrt{2}+1}{x^2-x\sqrt{2}+1}-$

$$-\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{x\sqrt{2}}{x^2-1}.$$

937. $y = x(\arcsin x)^2 + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x.$

938. $y = \frac{\arccos x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

939. $y = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2-1} - \frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}.$

940. $y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{2}\ln\frac{1-x}{1+x}.$

941. $y = \frac{1}{12}\ln\frac{x^4-x^2+1}{(x^2+1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2x^2-1}.$

942. $y = \frac{x^6}{1+x^{12}} - \operatorname{arcctg} x^6.$

943. $y = \ln\frac{1-\sqrt[3]{x}}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}} + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\frac{1+2\sqrt[3]{x}}{\sqrt{3}}.$

944. $y = \operatorname{arctg}\frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}.$

945. $y = \operatorname{arcctg}\frac{a-2x}{2\sqrt{ax-x^2}}$ $(a>0).$

946. $y = \frac{3-x}{2}\sqrt{1-2x-x^2} + 2\arcsin\frac{1+x}{\sqrt{2}}.$

947. $y = \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt[4]{1+x^4}+x}{\sqrt[4]{1+x^4}-x} - \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt[4]{1+x^4}}{x}.$

948. $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x).$

949. $y = \sqrt{1-x^2}\cdot\ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} +$

$$+\frac{1}{2}\ln\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} + \sqrt{1-x^2} + \arcsin x.$$

950. $y = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\operatorname{arctg} x)^2.$

951. $y = \ln\left(e^x + \sqrt{1+e^{2x}}\right).$

952. $y = \operatorname{arctg}\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$.

953. $y = \arcsin\left(\dfrac{\sin a \sin x}{1 - \cos a \cos x}\right)$.

954. $$y = \frac{1}{4\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{x^2+2} - x\sqrt{3}}{\sqrt{x^2+2} + x\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+2}}{x}.$$

955. $$y = \frac{1}{2\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4}} - \frac{1}{4\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{1+x^4} - x\sqrt{2}}{\sqrt{1+x^4} + x\sqrt{2}}.$$

956. $y = \dfrac{x\sqrt{1-x^2}}{1+x^2} - \dfrac{3}{\sqrt{2}} \operatorname{arcctg} \dfrac{x\sqrt{2}}{\sqrt{1-x^2}}$.

957. $y = \arccos(\sin x^2 - \cos x^2)$.

958. $y = \arcsin(\sin x^2) + \arccos(\cos x^2)$.

959. $y = e^{m \arcsin x}[\cos(m \arcsin x) + \sin(m \arcsin x)]$.

960. $y = \operatorname{arctg} e^x - \ln \sqrt{\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}}$.

960.1. $y = \sqrt{1 + \sqrt[3]{1 + \sqrt[4]{1 + x^4}}}$.

960.2. $y = \operatorname{arcctg} \dfrac{1}{\sqrt{\operatorname{ctg} \dfrac{1}{x^2}}}$.

960.3. $y = \ln^2\left(\sec 2\sqrt[3]{x}\right)$.

961. $y = x + x^x + x^{x^x}$ $(x > 0)$.

962. $y = x^{x^a} + x^{a^x} + a^{x^x}$ $(a > 0,\ x > 0)$.

963. $y = \sqrt[x]{x}$ $(x > 0)$.

964. $y = (\sin x)^{\cos x} + (\cos x)^{\sin x}$.

965. $y = (\ln x)^x : x^{\ln x}$.

965.1. $y = \left[\dfrac{\arcsin(\sin^2 x)}{\arccos(\cos^2 x)}\right]^{\operatorname{arctg}^2 x}$.

966. $y=\log_x e$. **967.** $y=\ln(\operatorname{ch} x)+\dfrac{1}{2\operatorname{ch}^2 x}$.

968. $y=\dfrac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}-\ln\left(\operatorname{cth}\dfrac{x}{2}\right)$.

969. $y=\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$.

970. $y=\arccos\left(\dfrac{1}{\operatorname{ch} x}\right)$.

971. $y=\dfrac{b}{a}x+\dfrac{2\sqrt{a^2-b^2}}{a}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\dfrac{a-b}{a+b}}\operatorname{th}\dfrac{x}{2}\right)$
$(0\leqslant |b|<a)$.

972. Найти производную функции

$$y=\ln(\cos^2 x+\sqrt{1+\cos^4 x}),$$

вводя промежуточное переменное $u=\cos^2 x$.

Приемом, указанным в примере 972, найти производные функций:

973. $y=(\arccos x)^2\left[\ln^2(\arccos x)-\ln(\arccos x)+\dfrac{1}{2}\right]$.

974. $y=\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg}(\sqrt[4]{1+x^4})+\dfrac{1}{4}\ln\dfrac{\sqrt[4]{1+x^4}+1}{\sqrt[4]{1+x^4}-1}$.

975. $y=\dfrac{e^{-x^2}\arcsin(e^{-x^2})}{\sqrt{1-e^{-2x^2}}}+\dfrac{1}{2}\ln(1-e^{-2x^2})$.

976. $y=\dfrac{a^x}{1+a^{2x}}-\dfrac{1-a^{2x}}{1+a^{2x}}\operatorname{arcctg} a^{-x}$.

977. Найти производные и построить графики функций и их производных, если:

а) $y=|x|$; б) $y=x|x|$; в) $y=\ln|x|$.

978. Найти производные следующих функций:

а) $y=|(x-1)^2(x+1)^3|$; б) $y=|\sin^3 x|$;

в) $y=\arccos\dfrac{1}{|x|}$; г) $y=[x]\sin^2\pi x$.

Найти производные и построить графики функций и их производных:

979. $y=\begin{cases} 1-x & \text{при } -\infty<x<1; \\ (1-x)(2-x) & \text{при } 1\leqslant x\leqslant 2; \\ -(2-x) & \text{при } 2<x<+\infty. \end{cases}$

980. $y=\begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2 & \text{при } a\leqslant x\leqslant b; \\ 0 & \text{вне отрезка } [a,\ b]. \end{cases}$

981. $y=\begin{cases} x & \text{при } x<0; \\ \ln(1+x) & \text{при } x\geqslant 0. \end{cases}$

982. $y=\begin{cases} \operatorname{arctg} x & \text{при } |x|\leqslant 1; \\ \frac{\pi}{4}\operatorname{sgn} x+\frac{x-1}{2} & \text{при } |x|>1. \end{cases}$

983. $y=\begin{cases} x^2e^{-x^2} & \text{при } |x|\leqslant 1; \\ \frac{1}{e} & \text{при } |x|>1. \end{cases}$

984. Производная от логарифма данной функции $y=f(x)$ называется *логарифмической производной* этой функции:

$$\frac{y'}{y}=\frac{d}{dx}\ln|f(x)|\equiv\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Найти логарифмическую производную от функции y, если:

а) $y=x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$; б) $y=\frac{x^2}{1-x}\sqrt[3]{\frac{3-x}{(3+x)^2}}$;

в) $y=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\ldots(x-a_n)^{\alpha_n}$;

г) $y=\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)^n$.

985. Пусть $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ — дифференцируемые функции от x. Найти производную от функции y, если:

а) $y=\sqrt{\varphi^2(x)+\psi^2(x)}$; б) $y=\operatorname{arctg}\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$;

в) $y=\sqrt[\varphi(x)]{\psi(x)}$ $(\varphi(x)\neq 0;\ \psi(x)>0)$;

г) $y=\log_{\varphi(x)}\psi(x)$ $(\varphi(x)>0;\ \psi(x)>0)$.

986. Найти y', если:

а) $y=f(x^2)$; б) $y=f(\sin^2 x)+f(\cos^2 x)$;

в) $y=f(e^x)\cdot e^{f(x)}$; г) $y=f\{f[f(x)]\}$,

где $f(u)$ — дифференцируемая функция.

986.1. Найти $f'(0)$, если

$$f(x) = x(x-1)(x-2)\ldots(x-1000).$$

987. Доказать следующее правило дифференцирования определителя n-го порядка:

$$\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{k1}(x) & f_{k2}(x) & \ldots & f_{kn}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}' = \sum_{k=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \ldots & f_{1n}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f'_{k1}(x) & f'_{k2}(x) & \ldots & f'_{kn}(x) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \ldots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}.$$

988. Найти $F'(x)$, если

$$F(x)=\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 2 \\ -3 & x & 3 \\ -2 & -3 & x+1 \end{vmatrix}.$$

989. Найти $F'(x)$, если

$$F(x)=\begin{vmatrix} x & x^2 & x^3 \\ 1 & 2x & 3x^2 \\ 0 & 2 & 6x \end{vmatrix}.$$

990. Дан график функции. Приближенно построить график ее производной.

991. Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x} & \text{при } x\neq 0; \\ 0 & \text{при } x=0 \end{cases}$$

имеет разрывную производную.

992. При каком условии функция

$$f(x)=x^n\sin\frac{1}{x}\quad (x\neq 0)\ \text{и}\ f(0)=0$$

а) непрерывна при $x=0$; б) дифференцируема при $x=0$; в) имеет непрерывную производную при $x=0$?

993. При каком условии функция

$$f(x)=|x|^n\sin\frac{1}{|x|^m}\ (x\neq 0)\ \text{и}\ f(0)=0\ (m>0)$$

имеет: а) ограниченную производную в окрестности начала координат; б) неограниченную производную в этой окрестности?

994. Найти $f'(a)$, если

$$f(x)=(x-a)\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x=a$.

995. Показать, что функция

$$f(x)=|x-a|\varphi(x),$$

где $\varphi(x)$ — непрерывная функция и $\varphi(a)\neq 0$, не имеет производной в точке a.

Чему равны односторонние производные $f'_-(a)$ и $f'_+(a)$?

996. Построить пример непрерывной функции, не имеющей производной в данных точках: $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

997. Показать, что функция

$$f(x)=x^2\left|\cos\frac{\pi}{x}\right|\quad (x\neq 0)\ \text{и}\ f(0)=0$$

имеет точки недифференцируемости в любой окрестности точки $x=0$, но дифференцируема в этой точке.

Построить эскиз графика этой функции.

998. Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x \text{ рационально;}\\ 0, & \text{если } x \text{ иррационально,}\end{cases}$$

имеет производную лишь при $x=0$.

999. Исследовать на дифференцируемость следующие функции:

а) $y=|(x-1)(x-2)^2(x-3)^3|$; б) $y=|\cos x|$;

в) $y=|\pi^2-x^2|\sin^2 x$; г) $y=\arcsin(\cos x)$;

д) $y=\begin{cases}\dfrac{x-1}{4}(x+1)^2 & \text{при } |x|\leqslant 1;\\ |x|-1 & \text{при } |x|>1.\end{cases}$

Для функции $f(x)$ определить левую производную $f'_-(x)$ и правую производную $f'_+(x)$, если:

1000. $f(x)=|x|$. **1001.** $f(x)=[x]\sin\pi x$.

1002. $f(x) = x\left|\cos\dfrac{\pi}{x}\right| \quad (x \neq 0),\ f(0) = 0.$

1003. $f(x) = \sqrt{\sin x^2}.$

1004. $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{1/x}} \quad (x \neq 0),\ f(0) = 0.$

1005. $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x^2}}.$

1006. $f(x) = |\ln|x|| \quad (x \neq 0).$

1007. $f(x) = \arcsin\dfrac{2x}{1 + x^2}.$

1008. $f(x) = (x-2)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-2} \quad (x \neq 2),\ f(2) = 0.$

1009. Показать, что функция $f(x) = x \sin\dfrac{1}{x}$ при $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ непрерывна при $x = 0$, но не имеет в этой точке ни левой, ни правой производной.

1009.1. Пусть x_0 — точка разрыва 1-го рода функции $f(x)$. Выражения

$$f'_-(x_0) = \lim_{h \to -0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - 0)}{h}$$

и

$$f'_+(x_0) = \lim_{h \to +0} \frac{e(x_0 + h) - f(x_0 + 0)}{h}$$

называются *обобщенными односторонними* (соответственно левой и правой) *производными* функции $f(x)$ в точке x_0.

Найти $f'_-(x_0)$ и $f'_+(x_0)$ в точках разрыва x_0 функции $f(x)$, если:

а) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 + x^3}{x}}$; б) $f(x) = \operatorname{arctg}\dfrac{1+x}{1-x}$;

в) $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$.

1010. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leqslant x_0; \\ ax + b, & \text{если } x > x_0. \end{cases}$$

Как следует подобрать коэффициенты a и b, чтобы функция $f(x)$ была непрерывной и дифференцируемой в точке $x = x_0$?

1011. Пусть

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x \leqslant x_0; \\ ax+b, & \text{если } x > x_0, \end{cases}$$

где функция $f(x)$ дифференцируема слева при $x = x_0$.

При каком выборе коэффициентов a и b функция $F(x)$ будет непрерывной и дифференцируемой в точке x_0?

1012. На сегменте $a \leqslant x \leqslant b$ построить сопряжение двух полупрямых

$$y = k_1(x-a) \quad (-\infty < x < a),$$
$$y = k_2(x-b) \quad (b < x < +\infty)$$

с помощью кубической параболы

$$y = A(x-a)(x-b)(x-c),$$

(где параметры A и c подлежат определению).

1013. Часть кривой $y = \dfrac{m^2}{|x|}$ $(|x| > c)$ дополнить параболой

$$y = a + bx^2 \quad (|x| \leqslant c)$$

(где a и b — неизвестные параметры) так, чтобы получилась гладкая кривая.

1014. Можно ли утверждать, что сумма $F(x) = f(x) + g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0?

1015. Можно ли утверждать, что произведение

$$F(x) = f(x)\,g(x)$$

не имеет производной в точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, а функция $g(x)$ не имеет производной в этой точке; б) обе функции $f(x)$ и $g(x)$ не имеют производной в точке x_0?

Полагая $x_0 = 0$, рассмотреть примеры: а) $f(x) = x$, $g(x) = |x|$; б) $f(x) = |x|$, $g(x) = |x|$.

1016. Что можно сказать о дифференцируемости функции

$$F(x) = f(g(x))$$

в данной точке $x = x_0$, если: а) функция $f(x)$ имеет производную в точке $x = g(x_0)$, а функция $g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$; б) функция $f(x)$ не имеет производной в точке $x = g(x_0)$, а функция $g(x)$ имеет производную в точке $x = x_0$; в) функция $f(x)$ не имеет производной в точке $x = g(x_0)$ и функция $g(x)$ не имеет производной в точке $x = x_0$?

Полагая $x_0 = 0$, рассмотреть примеры:

а) $f(x) = x^2$, $g(x) = |x|$, б) $f(x) = |x|$, $g(x) = x^2$

в) $f(x) = 2x + |x|$, $g(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}|x|$.

1017. В каких точках график функции $y = x + \sqrt[3]{\sin x}$ имеет вертикальные касательные? Построить этот график.

1018. Может ли функция $f(x)$ в точке ее разрыва иметь: а) конечную производную; б) бесконечную производную?

Рассмотреть пример: $f(x) = \operatorname{sgn} x$.

1019. Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале (a, b) и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, то обязательно ли

1) $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \infty$; 2) $\lim\limits_{x\to a} |f'(x)| = +\infty$?

Рассмотреть пример: $f(x) = \frac{1}{x} + \cos\frac{1}{x}$ при $x \to 0$.

1020. Если функция $f(x)$ дифференцируема в ограниченном интервале (a, b) и $\lim\limits_{x\to a} f'(x) = \infty$, то обязательно ли

$$\lim_{x\to a} f(x) = \infty?$$

Рассмотреть пример: $f(x) = \sqrt[3]{x}$ при $x \to 0$.

1021. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(x_0, +\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. Следует ли отсюда, что существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)$?

Рассмотреть пример: $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$.

1022. Пусть ограниченная функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(x_0, +\infty)$ и существует $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$; следует ли отсюда, что существует $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ конечный или бесконечный?

Рассмотреть пример: $f(x) = \cos(\ln x)$.

1023. Можно ли почленно дифференцировать неравенство между функциями?

1024. Вывести формулы для сумм:

$$P_n = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}$$

и

$$Q_n = 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \ldots + n^2x^{n-1}.$$

Указание. Рассмотреть $(x + x^2 + \ldots + x^n)'$.

1025. Вывести формулы для сумм:

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx$$

и

$$T_n = \cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx.$$

1025.1. Вывести формулу для суммы

$$S_n = \operatorname{ch} x + 2\operatorname{ch} 2x + \ldots + n\operatorname{ch} nx.$$

Указание. $S_n = (\operatorname{sh} x + \operatorname{sh} 2x + \ldots + \operatorname{sh} nx)'$.

1026. Пользуясь тождеством

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n} = \frac{\sin x}{2^n \sin\dfrac{x}{2^n}},$$

вывести формулу для суммы

$$S_n = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \frac{1}{4}\operatorname{tg}\frac{x}{4} + \ldots + \frac{1}{2^n}\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}.$$

1027. Доказать, что производная четной дифференцируемой функции есть функция нечетная, а производная нечетной дифференцируемой функции есть функция четная.

Дать геометрическую интерпретацию этого факта.

1028. Доказать, что производная дифференцируемой периодической функции есть функция снова периодическая с тем же периодом.

1029. С какой скоростью возрастает площадь круга в тот момент, когда радиус этого круга $R = 10$ см, если радиус круга растет равномерно со скоростью 2 см/с?

1030. С какой скоростью изменяются площадь и диагональ прямоугольника в тот момент, когда одна сторона его $x = 20$ м, а другая сторона $y = 15$ м, если первая сторона прямоугольника уменьшается со скоростью 1 м/с, а вторая возрастает со скоростью 2 м/с?

1031. Из одного и того же порта одновременно вышли пароход A с направлением на север и пароход B с направлением на восток. С какой скоростью возрастает расстояние между ними, если скорость парохода A равна 30 км/ч, а парохода B равна 40 км/ч?

1032. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } 0 \leqslant x \leqslant 2; \\ 2x-2, \text{ если } 2 < x < +\infty, \end{cases}$$

и $S(x)$ — площадь, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью Ox и перпендикуляром к оси Ox, проведенным в точке x $(x \geqslant 0)$.

Составить аналитическое выражение функции $S(x)$, найти производную $S'(x)$ и построить график функции $y = S'(x)$.

1033. Функция $S(x)$ есть площадь, ограниченная дугой окружности $y = \sqrt{a^2-x^2}$, осью Ox и двумя перпендикулярами к оси Ox, проведенными в точках 0 и x $(|x| \leqslant a)$.

Составить аналитическое выражение функции $S(x)$, найти производную $S'(x)$ и построить график этой производной.

§ 2. Производная обратной функции. Производная функции, заданной параметрически. Производная функции, заданной в неявном виде

1°. Производная обратной функции. Дифференцируемая функция $y = f(x)$ $(a < x < b)$ с производной $f'(x) \neq 0$ имеет однозначную непрерывную обратную функцию $x = f^{-1}(y)$, причем обратная функция также дифференцируема и справедлива формула

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

2°. Производная функции, заданной параметрически. Система уравнений

$$\left.\begin{aligned} x &= \varphi(t), \\ y &= \psi(t) \end{aligned}\right\} \quad (\alpha < t < \beta),$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — дифференцируемые функции и $\varphi'(t) \neq 0$, определяет y, в некоторой области, как однозначную дифференцируемую функцию от x:

$$y = \psi(\varphi^{-1}(x)),$$

причем производная этой функции может быть найдена по формуле

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

3°. Производная функции, заданной в неявном виде. Если дифференцируемая функция $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению

$$F(x, y) = 0,$$

то производная $y' = y'(x)$ этой неявной функции может быть найдена из уравнения

$$\frac{d}{dx}[F(x, y)] = 0,$$

где $F(x, y)$ рассматривается как сложная функция переменной x.

(Более подробно о дифференцировании неявных функций см. ч. II, отд. VI, § 3.)

1034. Показать, что существует однозначная функция $y = y(x)$, определяемая уравнением $y^3 + 3y = x$, и найти ее производную y'_x.

1035. Показать, что существует однозначная функция $y = y(x)$, определяемая уравнением

$$y - \varepsilon \sin y = x \quad (0 \leqslant \varepsilon < 1),$$

и найти производную y'_x.

1036. Определить области существования обратных функций $x = x(y)$ и найти их производные, если:

а) $y = x + \ln x$ $(x > 0)$; б) $y = x + e^x$;

в) $y = \operatorname{sh} x$; г) $y = \operatorname{th} x$.

1037. Выделить однозначные непрерывные ветви обратных функций $x = x(y)$, найти их производные и построить графики, если:

а) $y = 2x^2 - x^4$; б) $y = \dfrac{x^2}{1+x^2}$; в) $y = 2e^{-x} - e^{-2x}$.

1038. Построить эскиз графика функции $y = y(x)$ и найти производную y'_x, если: $x = -1 + 2t - t^2$, $y = 2 - 3t + t^3$. Чему равна $y'_x(x)$ при $x = 0$ и при $x = -1$? В какой точке $M(x, y)$ производная $y'_x(x) = 0$?

Найти производные y'_x (параметры положительны) если:

1039. $x = \sqrt[3]{1-\sqrt{t}}$, $y = \sqrt{1-\sqrt[3]{t}}$.

1040. $x = \sin^2 t$, $y = \cos^2 t$.

1041. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

1042. $x = a\operatorname{ch} t$, $y = b\operatorname{sh} t$.

1043. $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$.

1044. $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$.

1045. $x = e^{2t}\cos^2 t$, $y = e^{2t}\sin^2 t$.

1046. $x = \arcsin\dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$, $y = \arccos\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

1047. Показать, что функция $y = y(x)$, определяемая системой уравнений

$$x = 2t + |t|, \quad y = 5t^2 + 4t|t|,$$

дифференцируема при $t = 0$, однако ее производная в этой точке не может быть найдена по обычной формуле.

Найти производные y'_x от следующих функций, заданных в неявном виде:

1048. $x^2 + 2xy - y^2 = 2x$.

Чему равно y' при $x = 2$ и $y = 4$ и при $x = 2$ и $y = 0$?

1049. $y^2 = 2px$ (парабола).

1050. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ (эллипс).

1051. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ (парабола).

1052. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ (астроида).

1053. $\operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} = \ln\sqrt{x^2+y^2}$ (логарифмическая спираль).

1054. Найти y'_x, если:

а) $r = a\varphi$ (спираль Архимеда);

б) $r = a(1 + \cos\varphi)$ (кардиоида);

в) $r = ae^{m\varphi}$ (логарифмическая спираль),

где $r = \sqrt{x^2+y^2}$ и $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}$ — полярные координаты.

§ 3. Геометрический смысл производной

1°. **Уравнения касательной и нормали.** Уравнения *касательной* MT и *нормали* MN к графику дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке его $M(x, y)$ (рис. 7) соответственно имеют вид:

$$Y - y = y'(X - x)$$

и

$$Y - y = -\frac{1}{y'}(X - x),$$

где X, Y — текущие координаты касательной или нормали, а $y' = f'(x)$ — значение производной в точке касания.

2°. **Отрезки касательной и нормали.** Для отрезков касательной и нормали: PT — подкасательная, PN — поднормаль, MT — касательная, MN—нормаль (рис. 7);

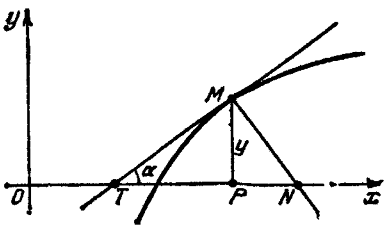

Рис. 7

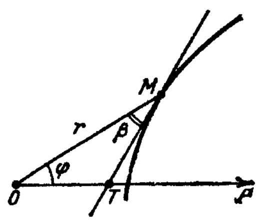

Рис. 8

учитывая, что $\operatorname{tg} \alpha = y'$, получаем следующие значения:

$$PT = \left|\frac{y}{y'}\right|, \qquad PN = |yy'|,$$

$$MT = \left|\frac{y}{y'}\right|\sqrt{1 + y'^2}, \quad MN = |y|\sqrt{1 + y'^2}.$$

3°. **Угол между касательной и радиусом-вектором точки касания.** Если $r = f(\varphi)$ — уравнение кривой в полярной системе координат и β — угол, образованный касательной MT и радиусом-вектором OM точки касания M (рис. 8), то

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{r}{r'}.$$

1055. Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$y = (x + 1)\sqrt[3]{3 - x}$$

в точках: а) $A(-1, 0)$; б) $B(2, 3)$; в) $C(3, 0)$.

1056. В каких точках кривой $y = 2 + x - x^2$ касательная к ней а) параллельна оси Ox; б) параллельна биссектрисе первого координатного угла?

1057. Доказать, что парабола

$$y = a(x - x_1)(x - x_2) \qquad (a \neq 0,\ x_1 < x_2)$$

пересекает ось Ox под углами α и β $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2},\ 0 < \beta < \frac{\pi}{2}\right)$, равными между собой.

1058. На кривой $y = 2 \sin x$ $(-\pi \leqslant x \leqslant \pi)$ определить те участки ее, где «крутизна кривой» (т. е. $|y'|$) превышает 1.

1059. Функции $y = x$ и $y_1 = x + 0{,}01 \sin 1\,000\,\pi x$ отличаются друг от друга не больше чем на 0,01. Что можно сказать о максимальном значении разности производных этих функций?

Построить соответствующие графики.

1060. Под каким углом кривая $y = \ln x$ пересекает ось Ox?

1061. Под какими углами пересекаются кривые

$$y = x^2 \text{ и } x = y^2?$$

1062. Под какими углами пересекаются кривые

$$y = \sin x \text{ и } y = \cos x?$$

1063. При каком выборе параметра n кривая

$$y = \operatorname{arctg} nx \quad (n > 0)$$

пересекает ось Ox под углом, большим 89°?

1063.1. Показать, что кривая $y = |x|^\alpha$

а) при $0 < \alpha < 1$ касается оси Oy;

б) при $1 < \alpha < +\infty$ касается оси Ox.

1063.2. Показать, что для графика функции

$$y = \begin{cases} |x|^\alpha, & \text{если } \alpha \neq 0\ x \neq 0, \\ 1, & \text{если } x = 0, \end{cases}$$

предельное положение секущей, проходящей через точку $A(0, 1)$, есть ось Oy.

1064. Определить угол между левой и правой касательными к кривой: а) $y = \sqrt{1 - e^{-a^2x^2}}$ в точке $x = 0$; б) $y = \arcsin \frac{2x}{1 + x^2}$ в точке $x = 1$.

1065. Показать, что касательная к логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$ (a и m — постоянные) образует постоянный угол с радиусом-вектором точки касания.

1066. Определив длину подкасательной к кривой $y = ax^n$, дать способ построения касательной к этой кривой.

1067. Доказать, что у параболы $y^2 = 2px$

а) подкасательная равна удвоенной абсциссе точки касания;

б) поднормаль постоянна.

Дать способ построения касательной к параболе.

1068. Доказать, что показательная кривая

$$y = a^x \quad (a > 0)$$

имеет постоянную подкасательную. Дать способ построения касательной к показательной кривой.

1069. Определить длину нормали к цепной линии

$$y = a\operatorname{ch}\frac{x}{a}$$

в любой ее точке $M(x_0, y_0)$.

1070. Доказать, что у астроиды

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \quad (a > 0)$$

длина отрезка касательной, заключенного между осями координат, есть величина постоянная.

1071. При каком соотношении между коэффициентами a, b и c парабола $y = ax^2 + bx + c$ касается оси Ox?

1072. При каком условии кубическая парабола

$$y = x^3 + px + q$$

касается оси Ox?

1073. При каком значении параметра a парабола $y = ax^2$ касается кривой $y = \ln x$?

1074. Доказать, что кривые

$$y = f(x) \quad (f(x) > 0) \text{ и } y = f(x)\sin ax,$$

где $f(x)$ — дифференцируемая функция, касаются друг друга в общих точках.

1075. Показать, что семейства гипербол $x^2 - y^2 = a$ и $xy = b$ образуют *ортогональную сетку*, т. е. кривые этих семейств пересекаются под прямыми углами.

1076. Доказать, что семейства парабол

$$y^2 = 4a(a-x) \quad (a > 0) \text{ и } y^2 = 4b(b + x) \quad (b > 0)$$

образуют ортогональную сетку.

1077. Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$x = 2t-t^2, \quad y = 3t-t^3$$

в точках: а) $t = 0$; б) $t = 1$.

1078. Написать уравнения касательной и нормали к кривой

$$x = \frac{2t+t^2}{1+t^3}, \quad y = \frac{2t-t^2}{1+t^3}$$

в точках: а) $t = 0$, б) $t = 1$, в) $t = \infty$.

1079. Написать уравнение касательной к циклоиде

$$x = a(t-\sin t), \quad y = a(1-\cos t)$$

в произвольной точке $t = t_0$. Дать способ построения касательной к циклоиде.

1080. Доказать, что трактриса

$$x = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{t}{2} + \cos t\right), \quad y = a\sin t \quad (a > 0, \ 0 < t < \pi)$$

имеет отрезок касательной постоянной длины.

Написать уравнения касательной и нормали в заданных точках к следующим кривым:

1081. $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{64} = 1$, $\quad M(6;\ 6,4)$.

1082. $xy + \ln y = 1$, $\quad M(1;\ 1)$.

§ 4. Дифференциал функции

1°. Дифференциал функции. Если приращение функции $y = f(x)$ от независимой переменной x может быть представлено в виде

$$\Delta y = A(x)\,dx + o(dx),$$

где $dx = \Delta x$, то линейная часть этого приращения называется *дифференциалом функции* y:

$$dy = A(x)\,dx.$$

Для существования дифференциала функции $y = f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы существовала конечная производная $y' = f'(x)$, причем имеем:

$$dy = y'\,dx. \qquad (1)$$

Формула (1) сохраняет свою силу и в том случае, если переменная x является функцией от новой независимой переменной (*свойство инвариантности первого дифференциала*).

2°. Оценка малых приращений функции. Для подсчета малых приращений дифференцируемой функции $f(x)$ можно пользоваться формулой

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\,\Delta x,$$

относительная погрешность которой сколь угодно мала при достаточно малом $|\Delta x|$, если $f'(x)\neq 0$.

В частности, если независимая переменная x определяется с предельной абсолютной погрешностью, равной Δ_x, то Δ_y и δ_y — предельные абсолютная и относительная погрешности функции $y=f(x)$ — приближенно выражаются следующими формулами:

$$\Delta_y=|y'|\,\Delta_x$$

и

$$\delta_y=\left|\frac{y'}{y}\right|\Delta_x$$

1083. Для функции

$$f(x)=x^3-2x+1$$

определить: 1) $\Delta f(1)$; 2) $df(1)$ и сравнить их, если: а) $\Delta x=1$; б) $\Delta x=0{,}1$; в) $\Delta x=0{,}01$.

1084. Уравнение движения дается формулой

$$x=5t^2,$$

где t измеряется в секундах и x — в метрах.

Для момента времени $t=2$ с определить Δx — приращение пути и dx — дифференциал пути и сравнить их, если:

а) $\Delta t=1$ с; б) $\Delta t=0{,}1$ с; в) $\Delta t=0{,}001$ с.

Найти дифференциал функции y, если:

1085. $y=\dfrac{1}{x}$. **1086.** $y=\dfrac{1}{a}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}$ $(a\neq 0)$.

1087. $y=\dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right|$. **1088.** $y=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|$.

1089. $y=\arcsin\dfrac{x}{a}$ $(a\neq 0)$.

1090. Найти:

а) $d(xe^x)$; б) $d(\sin x - x\cos x)$; в) $d\left(\frac{1}{x^3}\right)$;

г) $d\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$; д) $d\left(\sqrt{a^2+x^2}\right)$; е) $d\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$;

ж) $d\ln(1-x^2)$; з) $d\left(\arccos\frac{1}{|x|}\right)$;

и) $d\left[\frac{\sin x}{2\cos^2 x}+\frac{1}{2}\ln\left|\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|\right]$.

Пусть u, v, w — дифференцируемые функции от x. Найти дифференциал функции y, если:

1091. $y = uvw$. **1092.** $y=\frac{u}{v^2}$. **1093.** $y=\frac{1}{\sqrt{u^2+v^2}}$.

1094. $y=\operatorname{arctg}\frac{u}{v}$. **1095.** $y=\ln\sqrt{u^2+v^2}$.

1096. Найти: а) $\frac{d}{d(x^3)}(x^3-2x^6-x^9)$;

б) $\frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right)$; в) $\frac{d(\sin x)}{d(\cos x)}$; г) $\frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)}$;

д) $\frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)}$.

1097. В круговом секторе радиус $R = 100$ см и центральный угол $\alpha = 60°$. Насколько изменится площадь этого сектора, если: а) радиус его R увеличить на 1 см; б) угол α уменьшить на $30'$?

Дать точное и приближенное решения.

1098. Период колебания маятника (в секундах) определяется по формуле $T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, где l — длина маятника в сантиметрах и $g = 981$ см/с^2 — ускорение силы тяжести.

Насколько нужно изменить длину маятника $l = 20$ см, чтобы период T увеличился на 0,05 с?

Заменяя приращение функции дифференциалом, найти приближенно следующие значения:

1099. $\sqrt[3]{1{,}02}$. **1100.** $\sin 29°$. **1101.** $\cos 151°$.

1102. $\operatorname{arctg} 1{,}05$. **1103.** $\lg 11$.

1104. Доказать приближенную формулу

$$\sqrt{a^2+x}\approx a+\frac{x}{2a}\qquad (a>0),$$

где $|x|\ll a$ (соотношение $A\ll B$ между положительными A и B означает, что A весьма мало по сравнению с B).

С помощью этой формулы приближенно вычислить:

а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{34}$; в) $\sqrt{120}$ и сравнить с табличными данными.

1104.1. Доказать формулу

$$\sqrt{a^2+x}=a+\frac{x}{2a}-r\qquad (a>0,\ x>0),$$

где

$$0<r<\frac{x^2}{8a^3}.$$

1105. Доказать приближенную формулу

$$\sqrt[n]{a^n+x}\approx a+\frac{x}{na^{n-1}}\qquad (a>0),$$

где $|x|\ll a$.

С помощью этой формулы приближенно вычислить:

а) $\sqrt[3]{9}$; б) $\sqrt[4]{80}$; в) $\sqrt[7]{100}$; г) $\sqrt[10]{1000}$.

1106. Сторона квадрата $x = 2{,}4$ м $\pm$ 0,05 м. С какими предельной абсолютной и относительной погрешностями можно вычислить площадь этого квадрата?

1107. С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус R шара, чтобы объем его можно было определить с точностью до 1 %?

1108. Для определения ускорения силы тяжести с помощью колебания маятника пользуются формулой $g = 4\pi^2 l/T^2$, где l — длина маятника, T — полный период колебаний маятника. Как отразится на значении g относительная погрешность δ при измерении: а) длины l; б) периода T?

1109. Определить абсолютную погрешность десятичного логарифма числа x ($x>0$), если относительная погрешность этого числа равна δ.

1110. Доказать, что углы по логарифмической таблице тангенсов определяются точнее, чем по логарифмической таблице синусов с тем же самым числом десятичных знаков.

§ 5. Производные и дифференциалы высших порядков

1°. Основные определения. *Производные высших порядков* от функции $y = f(x)$ определяются последовательно соотношениями (предполагается, что соответствующие операции имеют смысл!):

$$f^{(n)}(x) = \{f^{(n-1)}(x)\}' \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Если функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ на интервале (a, b), то кратко пишут: $f(x) \in C^{(n)}(a, b)$. В частности, если $f(x)$ имеет непрерывные производные всех порядков на (a, b), то употребляется запись: $f(x) \in C^{(\infty)}(a, b)$.

Дифференциалы высших порядков от функции $y = f(x)$ последовательно определяются формулами

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

где принято $d^1 y = dy = y' dx$.

Если x — независимая переменная, то полагают:

$$d^2 x = d^3 x = \ldots = 0.$$

В этом случае справедливы формулы

$$d^n y = y^{(n)} dx^n \quad \text{и} \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

2°. Основные формулы:

I. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \quad (a > 0); \quad (e^x)^{(n)} = e^x.$

II. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

III. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right).$

IV. $(x^m)^{(n)} = m(m-1)\ldots(m-n+1)\,x^{m-n}.$

V. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}.$

3°. Формула Лейбница. Если функции $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ имеют производные n-го порядка (n-кратно дифференцируемы) то

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

где $u^{(0)} = u$, $v^{(0)} = v$ и C_n^i — число сочетаний из n элементов по i.

Аналогично для дифференциала $d^n(uv)$ получаем:

$$d^n(uv) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i d^{n-i}u d^i v,$$

где положено $d^0 u = u$ и $d^0 v = v$.

Найти y'', если:

1111. $y = x\sqrt{1+x^2}$. **1112.** $y = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1113. $y = e^{-x^2}$. **1114.** $y = \operatorname{tg} x$.

1115. $y = (1+x^2)\operatorname{arctg} x$. **1116.** $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1117. $y = x\ln x$. **1118.** $y = \ln f(x)$.

1119. $y = x[\sin(\ln x) + \cos(\ln x)]$.

1120. Найти $y(0)$, $y'(0)$ и $y''(0)$, если

$$y = e^{\sin x}\cos(\sin x).$$

Пусть $u = \varphi(x)$ и $v = \psi(x)$ — дважды дифференцируемые функции. Найти y'', если:

1121. $y = u^2$. **1122.** $y = \ln\dfrac{u}{v}$.

1123. $y = \sqrt{u^2+v^2}$. **1124.** $y = u^v$ $(u > 0)$.

Пусть $f(x)$ — трижды дифференцируемая функция. Найти y' и y''', если:

1125. $y = f(x^2)$. **1126.** $y = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1127. $y = f(e^x)$. **1128.** $y = f(\ln x)$.

1129. $y = f(\varphi(x))$, где $\varphi(x)$ — достаточное число раз дифференцируемая функция.

1130. Найти d^2y для функции $y = e^x$ в двух случаях: а) x — независимая переменная; б) x — промежуточный аргумент.

Считая x независимой переменной, найти d^2y, если:

1131. $y = \sqrt{1+x^2}$. **1132.** $y = \dfrac{\ln x}{x}$. **1133.** $y = x^x$.

Пусть u и v — дважды дифференцируемые функции от переменной x. Найти d^2y, если:

1134. $y = uv$. **1135.** $y = \frac{u}{v}$.

1136. $y = u^m v^n$ (m и n — постоянные).

1137. $y = a^u$ $(a > 0)$. **1138.** $y = \ln\sqrt{u^2+v^2}$.

1139. $y = \operatorname{arctg}\frac{u}{v}$.

Найти производные y'_x, y''_{x^2}, y'''_{x^3} от функции $y = y(x)$, заданной параметрически, если:

1140. $x = 2t - t^2$, $y = 3t - t^3$.

1141. $x = a\cos t$, $y = a\sin t$.

1142. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$.

1143. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$.

1144. $x = f'(t)$, $y = tf'(t) - f(t)$.

1145. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема достаточное число раз. Найти производные x', x'', x''', x^{IV} обратной функции $x = f^{-1}(y)$, предполагая, что эти производные существуют.

Найти y'_x, y''_{x^2}, и y'''_{x^3} от функции $y = y(x)$, заданной неявно:

1146. $x^2 + y^2 = 25$. Чему равны y', y'' и y''' в точке $M(3, 4)$?

1147. $y^2 = 2px$. **1148.** $x^2 - xy + y^2 = 1$.

Найти y'_x и y''_{x^2}, если:

1149. $y^2 + 2\ln y = x^4$.

1150. $\sqrt{x^2+y^2} = ae^{\operatorname{arctg} y/x}$ $(a > 0)$.

1151. Пусть функция $f(x)$ определена и дважды дифференцируема при $x \leqslant x_0$. Как следует подобрать коэффициенты a, b и c, чтобы функция

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \leqslant x_0; \\ a(x-x_0)^2 + b(x-x_0) + c, & \text{если } x > x_0 \end{cases}$$

была дважды дифференцируема.

1152. Точка движется прямолинейно по закону

$$s = 10 + 20t - 5t^2.$$

Найти скорость и ускорение движения. Чему равны скорость и ускорение в момент времени $t = 2$?

1153. Точка $M(x, y)$ равномерно движется по окружности $x^2 + y^2 = a^2$, делая один оборот за T с. Найти скорость v и ускорение j проекции точки M на ось Ox, если при $t = 0$ точка занимала положение $M_0(a, 0)$.

1154. Тяжелая материальная точка $M(x, y)$ брошена в вертикальной плоскости Oxy под углом α к плоскости горизонта с начальной скоростью v_0. Составить (пренебрегая сопротивлением воздуха) уравнения движения и определить величину скорости v и ускорения j, а также траекторию движения. Чему равны наибольшая высота поднятия точки и дальность полета?

1155. Уравнения движения точки

$x = 4 \sin \omega t - 3 \cos \omega t$, $y = 3 \sin \omega t + 4 \cos \omega t$
(ω — постоянно).

Определить траекторию движения и величину скорости и ускорения.

Найти производные указанного порядка.

1156. $y = x(2x-1)^2(x+3)^3$; найти $y^{(6)}$ и $y^{(7)}$.

1157. $y = \dfrac{a}{x^m}$; найти y'''.

1158. $y = \sqrt{x}$; найти $y^{(10)}$.

1159. $y = \dfrac{x^2}{1-x}$; найти $y^{(8)}$.

1160. $y = \dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$; найти $y^{(100)}$.

1161. $y = x^2 e^{2x}$; найти $y^{(20)}$.

1162. $y = \dfrac{e^x}{x}$, найти $y^{(10)}$.

1163. $y = x \ln x$; найти $y^{(5)}$.

1164. $y = \dfrac{\ln x}{x}$; найти $y^{(5)}$.

1165. $y = x^2 \sin 2x$; найти $y^{(50)}$.

1166. $y = \dfrac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}$; найти y'''.

1167. $y = \sin x \sin 2x \sin 3x$; найти $y^{(10)}$.

1168. $y = x \operatorname{sh} x$; найти $y^{(100)}$

1169. $y = e^x \cos x$; найти y^{IV}.

1170. $y = \sin^2 x \ln x$; найти $y^{(6)}$.

В следующих примерах, считая x независимой переменной, найти дифференциалы указанного порядка:

1171. $y = x^5$; найти d^5y.

1172. $y = 1/\sqrt{x}$; найти d^3y.

1173. $y = x \cos 2x$; найти $d^{10}y$.

1174. $y = e^x \ln x$; найти d^4y.

1175. $y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x$; найти d^6y.

В следующих примерах найти дифференциалы указанного порядка, если u — функция от x, дифференцируемая достаточное число раз:

1176. $y = u^2$; найти $d^{10}y$.

1177. $y = e^u$; найти d^4y.

1178. $y = \ln u$; найти d^3y.

1179. Найти d^2y, d^3y и d^4y от функции $y = f(x)$, считая x функцией от некоторой независимой переменной.

1180. Выразить производные y'' и y''' от функции $y = f(x)$ через последовательные дифференциалы переменных x и y, не предполагая x независимой переменной.

1181. Показать, что функция $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению

$$y'' + y = 0.$$

1182. Показать, что функция $y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению

$$y'' - y = 0.$$

1183. Показать, что функция $y = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$, где C_1 и C_2 — произвольные постоянные и λ_1, λ_2 — постоянные, удовлетворяет уравнению

$$y'' - (\lambda_1 + \lambda_2) y' + \lambda_1 \lambda_2 y = 0.$$

1184. Показать, что функция

$$y = x^n\,[C_1\cos(\ln x) + C_2\sin(\ln x)],$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные и n — постоянная, удовлетворяет уравнению

$$x^2y'' + (1-2n)\,xy' + (1+n^2)\,y = 0.$$

1185. Показать, что функция

$$y = e^{x/\sqrt{2}}\left(C_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-x/\sqrt{2}}\left(C_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + C_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right),$$

где C_1, C_2, C_3 и C_4 — произвольные постоянные, удовлетворяет уравнению

$$y^{\mathrm{IV}} + y = 0.$$

1186. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет производную n-го порядка, то

$$[f(ax+b)]^{(n)} = a^n f^{(n)}(ax+b).$$

1187. Найти $P^{(n)}(x)$, если

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n.$$

Найти $y^{(n)}$, если:

1188. $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$. 1189. $y = \dfrac{1}{x(1-x)}$.

1190. $y = \dfrac{1}{x^2-3x+2}$.

Указание. Разложить функцию на простейшие дроби.

1191. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-2x}}$. 1192. $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$.

1193. $y = \sin^2 x$. 1194. $y = \cos^2 x$. 1195. $y = \sin^3 x$.

1196. $y = \cos^3 x$. 1197. $y = \sin ax \sin bx$.

1198. $y = \cos ax \cos bx$. 1199. $y = \sin ax \cos bx$.

1200. $y = \sin^2 ax \cos bx$. 1201. $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1202. $y = x\cos ax$. 1203. $y = x^2 \sin ax$.

1204. $y = (x^2+2x+2)e^{-x}$. 1205. $y = e^x/x$.

1206. $y = e^x\cos x$. 1207. $y = e^x \sin x$.

1208. $y = \ln \frac{a+bx}{a-bx}$.

1209. $y = e^{ax}P(x)$, где $P(x)$ — многочлен.

1210. $y = x \operatorname{sh} x$.

Найти $d^n y$, если:

1211. $y = x^n e^x$. **1212.** $y = \frac{\ln x}{x}$.

1213. Доказать равенства:

1) $[e^{ax}\sin(bx+c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2+b^2)^{n/2}\sin(bx+c+n\varphi)$

и

2) $[e^{ax}\cos(bx+c)]^{(n)} = e^{ax}(a^2+b^2)^{n/2}\cos(bx+c+n\varphi)$,

где

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{и} \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

1214. Найти $y^{(n)}$, если:
а) $y = \operatorname{ch} ax \cos bx$; б) $y = \operatorname{ch} ax \sin bx$.

1215. Преобразовав функцию $f(x) = \sin^{2p} x$, где p — натуральное число, в тригонометрический многочлен $f(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k \cos 2kx$, найти $f^{(n)}(x)$.

Указание. Положить $\sin x = \frac{1}{2i}(t - \bar{t})$, где $t = \cos x + i\sin x$ и $\bar{t} = \cos x - i\sin x$, и воспользоваться формулой Муавра.

1216. Найти $f^{(n)}(x)$, если:

а) $f(x) = \sin^{2p+1} x$; б) $f(x) = \cos^{2p} x$;

в) $f(x) = \cos^{2p+1} x$,

где p — целое положительное число (см. предыдущую задачу).

Если

$$f(x) = f_1(x) + if_2(x),$$

где i — мнимая единица и $f_1(x), f_2(x)$ — действительные функции от действительной переменной x, то по определению принимаем:

$$f'(x) = f_1'(x) + if_2'(x).$$

1217. Используя тождество

$$\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2i}\left(\frac{1}{x-i}-\frac{1}{x+i}\right),$$

доказать, что

$$\left(\frac{1}{x^2+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n\, n!}{(1+x^2)^{(n+1)/2}}\sin\left[(n+1)\operatorname{arcctg} x\right].$$

Указание. Применить формулу Муавра.

1218. Найти n-ю производную от функции

$$f(x)=\operatorname{arctg} x.$$

Найти $f^{(n)}(0)$, если:

1219. а) $f(x)=\dfrac{1}{(1-2x)(1+x)}$; б) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1-x}}$.

1220. а) $f(x)=x^2e^{ax}$; б) $f(x)=\operatorname{arctg} x$;

в) $f(x)=\arcsin x$.

1221. а) $f(x)=\cos(m\arcsin x)$; б) $f(x)=\sin(m\arcsin x)$.

1222. а) $f(x)=(\operatorname{arctg} x)^2$; б) $f(x)=(\arcsin x)^2$.

1223. Найти $f^{(n)}(a)$, если

$$f(x)=(x-a)^n\varphi(x),$$

где функция $\varphi(x)$ имеет непрерывную производную $(n-1)$-го порядка в окрестности точки a.

1224. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} x^{2n}\sin\dfrac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0\end{cases}$$

(n — натуральное число) в точке $x=0$ имеет производные до n-го порядка включительно и не имеет производной $(n+1)$-го порядка.

1225. Доказать, что функция

$$f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x\neq 0,\\ 0, & \text{если } x=0\end{cases}$$

бесконечно дифференцируема при $x=0$.

Построить график этой функции.

1226. Доказать, что *многочлены Чебышева*

$$T_m(x)=\frac{1}{2^{m-1}}\cos(m\arccos x)\qquad (m=1,\ 2,\ \ldots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)\,T''_m(x)-xT'_m(x)+m^2T_m(x)=0.$$

1227. Доказать, что *многочлены Лежандра*

$$P_m(x)=\frac{1}{2^m m!}\,[(x^2-1)^m]^{(m)}\qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

удовлетворяют уравнению

$$(1-x^2)\,P''_m(x)-2xP'_m(x)+m(m+1)\,P_m(x)=0.$$

Указание. Продифференцировать $m+1$ раз равенство $(x^2-1)\,u'=2mxu$, где $u=(x^2-1)^m$.

1228. *Многочлены Чебышева — Лагерра* определяются формулой

$$L_m(x)=e^x\,(x^me^{-x})^{(m)}\qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Найти явное выражение для многочлена $L_m(x)$.

Доказать, что $L_m(x)$ удовлетворяет уравнению

$$xL''_m(x)+(1-x)\,L'_m(x)+mL(x)=0.$$

Указание. Использовать равенство $xu'+(x-m)\,u=0$, где $u=x^me^{-x}$.

1229. Пусть $y=f(u)$ и $u=\varphi(x)$, где $f(u)$ и $\varphi(x)$ — n-кратно дифференцируемые функции.

Доказать, что

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\sum_{k=1}^{a}A_k(x)\,f^{(k)}(u),$$

где коэффициенты $A_k(x)$ $(k=0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ не зависят от функции $f(u)$.

1230. Доказать, что для n-й производной сложной функции $y=f(x^2)$ справедлива формула

$$\frac{d^ny}{dx^n}=(2x)^n f^{(n)}(x^2)+\frac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2}f^{(n-1)}(x^2)+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4}f^{(n-2)}(x^2)+\ldots$$

1231. *Многочлены Чебышева—Эрмита* определяются формулой

$$H_m(x) = (-1)^m e^{x^2}\left(e^{-x^2}\right)^{(m)} \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Найти явное выражение многочленов $H_m(x)$.

Доказать, что $H_m(x)$ удовлетворяет уравнению

$$H_m''(x) - 2xH_m'(x) + 2mH_m(x) = 0.$$

Указание. Использовать равенство $u' + 2xu = 0$, где $u = e^{-x^2}$.

1232. Доказать равенство

$$\left(x^{n-1}e^{1/x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}\, e^{1/x}.$$

Указание. Применить метод математической индукции.

1232.1. Доказать формулу

$$\frac{d^n}{dx^n}(x^n \ln x) = n!\left(\ln x + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) \quad (x > 0).$$

1232.2. Доказать формулу

$$\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\left(\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{(2n)!}{x^{2n+1}}\,[C_n(x)\sin x - S_n(x)\cos x],$$

где

$$C_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

и

$$S_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

1233. Пусть $\frac{d}{dx} = D$ обозначает операцию дифференцирования и

$$f(D) = \sum_{k=0}^{n} p_k(x)\, D^k$$

— символический дифференциальный многочлен, где $p_k(x)$ $(k = 0,\ 1,\ \ldots,\ n)$ — некоторые непрерывные функции от x.

Доказать, что

$$f(D)\{e^{\lambda x}u(x)\} = e^{\lambda x}f(D+\lambda)u(x),$$

где λ — постоянно.

1234. Доказать, что если в уравнении

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k y_x^{(k)} = 0$$

положить $x = e^t$, где t — независимая переменная, то это уравнение примет вид:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k D(D-1)\ldots(D-k+1)\,y = 0,$$

где $D = \dfrac{d}{dt}$.

§ 6. Теоремы Ролля, Лагранжа и Коши

1°. Теорема Ролля. Если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ внутри этого сегмента; 3) $f(a) = f(b)$, то существует по меньшей мере одно число c из интервала (a, b) такое, что

$$f'(c) = 0.$$

2°. Теорема Лагранжа. Если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ на интервале (a, b), то

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c), \text{ где } a < c < b$$

(*формула конечных приращений*).

3°. Теорема Коши. Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ и $g(x)$ имеют конечные производные $f'(x)$ и $g'(x)$ на интервале (a, b); 3) $f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0$ при $a < x < b$; 4) $g(a) \neq g(b)$, то

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad \text{где } a < c < b.$$

1235. Проверить справедливость теоремы Ролля для функции

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

1236. Функция $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ обращается в нуль при $x_1 = -1$ и $x_2 = 1$, но тем не менее $f'(x) \neq 0$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$. Объяснить кажущееся противоречие с теоремой Ролля.

1237. Пусть функция $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в каждой точке конечного или бесконечного интервала (a, b) и

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to b-0} f(x).$$

Доказать, что $f'(c) = 0$, где c — некоторая точка интервала (a, b).

1238. Пусть: 1) функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную производную $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$ на сегменте $[x_0, x_n]$; 2) $f(x)$ имеет производную n-го порядка $f^{(n)}(x)$ в интервале (x_0, x_n) и 3) выполнены равенства

$$f(x_0) = f(x_1) = \ldots = f(x_n) \quad (x_0 < x_1 < \ldots < x_n).$$

Доказать, что в интервале (x_0, x_n) существует по меньшей мере одна точка ξ такая, что $f^{(n)}(\xi) = 0$.

1239. Пусть: 1) функция $f(x)$ определена и имеет непрерывную производную $(p+q)$-го порядка $f^{(p+q)}(x)$ на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$, имеет производную $(p+q+1)$-го порядка $f^{(p+q+1)}(x)$ в интервале (a, b); 3) выполнены равенства

$$f(a) = f'(a) = \ldots = f^{(p)}(a) = 0$$

и

$$f(b) = f'(b) = \ldots = f^{(q)}(b) = 0.$$

Доказать, что в таком случае $f^{(p+q+1)}(c) = 0$, где c — некоторая точка интервала (a, b).

1240. Доказать, что если все корни многочлена

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \qquad (a_0 \neq 0)$$

с действительными коэффициентами a_k $(k = 0, 1, \ldots, n)$ вещественны, то его последовательные производные $P'_n(x)$, $P''_n(x)$, ..., $P_n^{(n-1)}(x)$ также имеют лишь вещественные корни.

1241. Доказать, что у многочлена Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \{(x^2-1)^n\}$$

все корни вещественные и заключены в интервале $(-1, 1)$.

1242. Доказать, что у многочлена Чебышева—Лагерра

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$$

все корни положительные.

1243. Доказать, что у многочлена Чебышева—Эрмита

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right)$$

все корни вещественные.

1244. Найти на кривой $y = x^3$ точку, касательная в которой параллельна хорде, соединяющей точки $A(-1, -1)$ и $B(2, 8)$.

1245. Верна ли формула конечных приращений для функции $f(x) = 1/x$ на сегменте $[a, b]$, если $ab < 0$?

1246. Найти функцию $\theta = \theta(x, \Delta x)$ такую, что

$$f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta\Delta x) \quad (0 < \theta < 1),$$

если:

а) $f(x) = ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$; б) $f(x) = x^3$;

в) $f(x) = 1/x$; г) $f(x) = e^x$.

1246.1. Пусть $f(x) \in C^{(1)}(-\infty, +\infty)$ и для любых x и h справедливо тождество:

$$f(x + h) - f(x) \equiv hf'(x).$$

Доказать, что $f(x) = ax + b$, где a и b — постоянные.

1246.2. Пусть $f(x) \in C^{(2)}(-\infty, +\infty)$ и для любых x и h справедливо тождество

$$f(x+h) - f(x) \equiv hf'\left(x + \frac{h}{2}\right).$$

Доказать, что $f(x) = ax^2 + bx + c$, где a, b и c — постоянные.

1247. Доказать, что если $x \geqslant 0$, то

$$\sqrt{x+1} - \sqrt{x} = \frac{1}{2\sqrt{x + \theta(x)}},$$

где

$$\frac{1}{4} \leqslant \theta(x) \leqslant \frac{1}{2},$$

причем $\lim\limits_{x \to +0} \theta(x) = 1/4$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \theta(x) = 1/2$.

1248. Пусть

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{3-x^2}{2} & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x} & \text{при } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

Определить промежуточное значение c формулы конечных приращений для функции $f(x)$ на сегменте $[0, 2]$.

1249. Пусть $f(x)-f(0)=xf'(\xi(x))$, где $0<\xi(x)<x$. Доказать, что если

$$f(x) = x\sin(\ln x) \text{ при } x>0 \text{ и } f(0)=0,$$

то функция $\xi=\xi(x)$ разрывна в любом сколь угодно малом интервале $(0, \xi)$, где $\varepsilon>0$.

1250. Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывную производную $f'(x)$ в интервале (a, b). Можно ли для всякой точки ξ из (a, b) указать две другие точки x_1 и x_2 из этого интервала такие, что

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(\xi) \quad (x_1<\xi<x_2)?$$

Рассмотреть пример: $f(x)=x^3$ $(-1\leqslant x\leqslant 1)$, где $\xi=0$.

1251. Доказать неравенства:

а) $|\sin x-\sin y|\leqslant|x-y|$;

б) $py^{p-1}(x-y)\leqslant x^p-y^p\leqslant px^{p-1}(x-y)$,

если $0<y<x$ и $p>1$;

в) $|\operatorname{arctg} a-\operatorname{arctg} b|\leqslant|a-b|$;

г) $\dfrac{a-b}{a}<\ln\dfrac{a}{b}<\dfrac{a-b}{b}$, если $0<b<a$.

1252. Объяснить, почему не верна формула Коши для функций

$$f(x)=x^2 \text{ и } g(x)=x^3$$

на сегменте $[-1, 1]$.

1253. Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на сегменте $[x_1, x_2]$, причем $x_1x_2>0$. Доказать, что

$$\frac{1}{x_1-x_2}\begin{vmatrix}x_1 & x_2\\ f(x_1) & f(x_2)\end{vmatrix}=f(\xi)-\xi f'(\xi),$$

где $x_1<\xi<x_2$.

1254. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема, но не ограничена на конечном интервале

(a, b), то ее производная $f'(x)$ также не ограничена на интервале (a, b). Обратная теорема не верна (построить пример).

1255. Доказать, что если функция $f(x)$ имеет в конечном или бесконечном интервале (a, b) ограниченную производную $f'(x)$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b).

1256. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, то $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, т. е. $f(x) = o(x)$ при $x \to +\infty$.

1257. Доказать, что если функция $f(x)$ дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и

$$f(x) = o(x) \text{ при } x \to +\infty,$$

то

$$\varliminf_{x\to+\infty} |f'(x)| = 0.$$

В частности, если существует $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x) = k$, то $k = 0$.

1258. а) Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна на сегменте $[x_0, X]$; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в интервале (x_0, X); 3) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to x_0+0} f'(x) = f'(x_0+0)$, то существует соответственно конечная или бесконечная односторонняя производная $f'_+(x_0)$ и $f'_+(x_0) = f'(x_0+0)$.

б) Показать, что для функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \quad (x \neq 1) \quad \text{и} \quad f(1) = 0$$

существует конечный предел $\lim\limits_{x\to1} f'(x)$, однако функция $f(x)$ не имеет односторонних производных $f'_-(1)$ и $f'_+(1)$. Дать геометрическую иллюстрацию этого факта.

Однако в этой точке существуют обобщенные односторонние производные (см. **1009.1**).

1259. Доказать, что если $f'(x) = 0$ при $a < x < b$, то

$$f(x) = \text{const при } a < x < b.$$

1260. Доказать, что единственная функция $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, имеющая постоянную производную

$$f'(x) = k,$$

есть линейная:

$$f(x) = kx + b.$$

1261. Что можно сказать о функции $f(x)$, если $f^{(n)}(x) = 0$?

1261.1. Пусть $f(x) \in C^{(\infty)}(-\infty, +\infty)$ и для каждого x существует натуральное число n_x ($n_x \leqslant n$) такое, что

$$f^{(n_x)}(x) = 0.$$

Доказать, что функция $f(x)$ есть полином.

1262. Доказать, что единственная функция $y = y(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$, удовлетворяющая уравнению

$$y' = \lambda y \quad (\lambda = \text{const}),$$

есть показательная;

$$y = Ce^{\lambda x},$$

где C — произвольная постоянная.

Указание. Рассмотреть $(ye^{-\lambda x})'$.

1263. Проверить, что функции

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \quad \text{и} \quad g(x) = \operatorname{arctg} x$$

имеют одинаковые производные в областях:

1) $x < 1$ и 2) $x > 1$.

Вывести зависимость между этими функциями.

1264. Доказать тождества:

а) $2\operatorname{arctg} x + \arcsin\frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x$ при $|x| \geqslant 1$;

б) $3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi$ при $|x| \leqslant \frac{1}{2}$.

1265. Доказать, что если: 1) функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$; 2) имеет конечную производную $f'(x)$ внутри него; 3) не является линейной, то в интервале (a, b) найдется по меньшей мере одна точка c такая, что

$$|f'(c)| > \left|\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right|.$$

Дать геометрическую иллюстрацию этого факта.

1266. Длказать, что если: 1) функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ на сегменте $[a, b]$ и 2) $f'(a) = f'(b) = 0$, то в интервале (a, b) существует по меньшей мере одна точка c такая, что

$$|f''(c)| \geqslant \frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|.$$

1267. Автомобиль, начав двигаться из некоторого начального пункта, закончил свой путь в t с, пройдя при этом расстояние s м. Доказать, что в некоторый момент времени абсолютная величина ускорения движения автомобиля была не меньше

$$\frac{4s}{t^2}\ \frac{\text{м}}{\text{с}^2}.$$

§ 7. Возрастание и убывание функции. Неравенства

1°. Возрастание и убывание функции. Функция $f(x)$ называется *возрастающей* (*убывающей*) на сегменте $[a, b]$, если

$$f(x_2) > f(x_1) \text{ при } a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$$

(или соответственно $f(x_2) < f(x_1)$ при $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$).

Если дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает (убывает) на сегменте $[a, b]$, то

$$f'(x) \geqslant 0 \text{ при } a \leqslant x \leqslant b \text{ (или } f'(x) \leqslant 0 \text{ при } a \leqslant x \leqslant b).$$

2°. Достаточный признак возрастания (убывания функции). Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и внутри него имеет положительную (отрицательную) производную $f'(x)$, то функция $f(x)$ возрастает (убывает) на $[a, b]$.

Определить промежутки монотонности в строгом смысле (возрастания или убывания) следующих функций:

1268. $y = 2 + x - x^2$. **1269.** $y = 3x - x^3$.

1270. $y = \dfrac{2x}{1+x^2}$. **1271.** $y = \dfrac{\sqrt{x}}{x+100}$ $(x \geqslant 0)$.

1272. $y = x + \sin x$. 1273. $y = x + |\sin 2x|$.

1274. $y = \cos\frac{\pi}{x}$. 1275. $y = \frac{x^2}{2^x}$.

1276. $y = x^n e^{-x}$ $(n > 0,\ x \geqslant 0)$. 1277. $y = x^2 - \ln x^2$.

1278. $f(x) = x\left(\sqrt{\frac{3}{2}} + \sin\ln x\right)$, если $x > 0$ и $f(0) = 0$.

1279. Доказать, что при увеличении числа сторон n периметр p_n правильного n-угольника, вписанного в окружность, возрастает, а периметр P_n правильного n-угольника, описанного около этой окружности, убывает. Пользуясь этим, доказать, что p_n и P_n имеют общий предел при $n \to \infty$.

1280. Доказать, что функция $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ возрастает на интервалах $(-\infty, -1)$ и $(0, +\infty)$.

1281. Доказать, что целая рациональная функция $P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ $(n \geqslant 1,\ a_n \neq 0)$ является монотонной (в строгом смысле!) в интервалах $(-\infty, -x_0)$ и $(x_0, +\infty)$, где x_0 — достаточно большое положительное число.

1282. Доказать, что рациональная функция

$$R(x) = \frac{a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m} \qquad (a_n b_m \neq 0),$$

отличная от тождественной постоянной, монотонна (в строгом смысле!) в интервалах $(-\infty, -x_0)$ и $(x_0, +\infty)$, где x_0 — достаточно большое положительное число.

1283. Производная монотонной функции обязательно ли является монотонной? Рассмотреть пример: $f(x) = x + \sin x$.

1284. Доказать, что если $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая дифференцируемая функция и

$$|f'(x)| \leqslant \varphi'(x) \text{ при } x \geqslant x_0,$$

то

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varphi(x) - \varphi(x_0) \text{ при } x \geqslant x_0.$$

Дать геометрическую интерпретацию этого факта.

1285. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в промежутке $a \leqslant x < +\infty$ и сверх того $f'(x) > k > 0$ при $x > a$, где k — постоянная.

Доказать, что если $f(a) < 0$, то уравнение $f(x) = 0$ имеет один и только один действительный корень в интервале $\left(a,\ a - \frac{f(a)}{k}\right)$.

1286. Функция $f(x)$ называется *возрастающей в точке* x_0, если в некоторой окрестности $|x - x_0| < \delta$ знак приращения функции $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ совпадает со знаком приращения аргумента $\Delta x_0 = x - x_0$.

Доказать, что если функция $f(x)$ $(a < x < b)$ возрастает в каждой точке некоторого конечного или бесконечного интервала (a, b), то она является возрастающей на этом интервале.

1287. Показать, что функция

$$f(x) = x + x^2 \sin\frac{2}{x}, \text{ если } x \neq 0 \text{ и } f(0) = 0,$$

возрастает в точке $x = 0$, но не является возрастающей ни в каком интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$, окружающем эту точку, где $\varepsilon > 0$ произвольно мало.

Построить эскиз графика функции.

1288. Доказать теорему: если 1) функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ n-кратно дифференцируемы; 2) $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$; 3) $\varphi^{(n)}(x) > \psi^{(n)}(x)$ при $x > x_0$, то имеет место неравенство

$$\varphi(x) > \psi(x) \text{ при } x > x_0.$$

1289. Доказать следующие неравенства:

а) $e^x > 1 + x$ при $x \neq 0$;

б) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1 + x) < x$ при $x > 0$;

в) $x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x$ при $x > 0$;

г) $\operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$;

д) $(x^\alpha + y^\alpha)^{1/\alpha} > (x^\beta + y^\beta)^{1/\beta}$ при $x > 0$, $y > 0$ и $0 < \alpha < \beta$.

Дать геометрическую иллюстрацию неравенств а) — г).

1290. Доказать неравенство

$$\frac{2}{\pi} x < \sin x < x \quad \text{при } 0 < x < \frac{\pi}{2}.$$

1291. Доказать, что при $x > 0$ имеет место неравенство

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}.$$

1292. У арифметической и геометрической прогрессий число членов и крайние члены соответственно одинаковы и все члены прогрессий положительны. Доказать, что у арифметической прогрессии сумма членов больше, чем у геометрической.

1293. Исходя из неравенства

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k x + b_k)^2 \geqslant 0,$$

где x, a_k, b_k ($k = 1, \ldots, n$) вещественны, доказать *неравенство Коши*

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2.$$

1294. Доказать, что среднее арифметическое положительных чисел не больше среднего квадратичного этих же чисел, т. е.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

1295. Доказать, что среднее геометрическое положительных чисел не больше среднего арифметического этих же чисел, т. е.

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \ldots x_n} \leqslant \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Указание. Применить метод математической индукции.

1296. *Средней порядка s* для двух положительных чисел a и b называется функция, определяемая равенством

$$\Delta_s(a, b) = \left(\frac{a^s + b^s}{2}\right)^{1/s}, \quad \text{если } s \neq 0,$$

и

$$\Delta_0(a, b) = \lim_{s\to 0} \Delta_s(a, b).$$

В частности, получаем: при $s = -1$ *среднее гармоническое*; при $s = 0$ *среднее геометрическое* (доказать!);

при $s=1$ *среднее арифметическое*; при $s=2$ *среднее квадратичное*.

Доказать, что:

1) $\min(a, b) \leqslant \Delta_s(a, b) \leqslant \max(a, b)$;

2) функция $\Delta_s(a, b)$ при $a \neq b$ есть возрастающая функция переменной s;

3) $\lim\limits_{s\to-\infty} \Delta_s(a, b) = \min(a, b)$;

$\lim\limits_{s\to+\infty} \Delta_s(a, b) = \max(a, b)$.

Указание. Рассмотреть $\dfrac{d}{ds}[\ln \Delta_s(a, b)]$.

1297(н). Доказать неравенства:

а) $x^\alpha - 1 > \alpha(x-1)$ при $\alpha \geqslant 2$, $x > 1$;

б) $\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{x-a}$, если $n > 1$, $x > a > 0$;

в) $1 + 2\ln x \leqslant x^2$ при $x > 0$.

§ 8. Направление вогнутости. Точки перегиба

1°. Достаточные условия вогнутости. График дифференцируемой функции $y = f(x)$ называется *вогнутым вверх* или *выпуклым вниз* (*вогнутым вниз* или *выпуклым вверх*) на сегменте $[a, b]$, если отрезок кривой

$$y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b)$$

расположен выше (соответственно ниже) касательной, проведенной в любой точке этого отрезка. Достаточным условием вогнутости графика вверх (вниз), в предположении существования второй производной $f''(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, является выполнение неравенства

$$f''(x) > 0 \quad (f''(x) < 0) \text{ при } a < x < b.$$

2°. Достаточное условие точки перегиба. Точки, в которых меняется направление вогнутости графика функции, называются *точками перегиба*. Точка x_0, для которой либо $f''(x_0) = 0$, либо $f''(x_0)$ не существует, причем $f'(x_0)$ имеет смысл, есть точка перегиба, если $f''(x)$ меняет свой знак при переходе через значение x_0.

1298. Исследовать направление вогнутости кривой

$$y = 1 + \sqrt[3]{x}$$

в точках $A(-1, 0)$, $B(1, 2)$ и $C(0, 0)$.

Найти промежутки вогнутости определенного знака и точки перегиба графиков следующих функций:

1299. $y=3x^2-x^3$. 1300. $y=\dfrac{a^3}{a^2+x^2}$ $(a>0)$.

1301. $y=x+x^{5/3}$. 1302. $y=\sqrt{1+x^2}$.

1303. $y=x+\sin x$. 1304. $y=e^{-x^2}$.

1305. $y=\ln(1+x^2)$. 1306. $y=x\sin(\ln x)$ $(x>0)$.

1307. $y=x^x$ $(x>0)$.

1308. Показать, что кривая

$$y=\frac{x+1}{x^2+1}$$

имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой. Построить график этой функции.

1309. При каком выборе параметра h «кривая вероятности»

$$y=\frac{h}{\sqrt{\pi}}e^{-h^2x^2} \quad (h>0)$$

имеет точки перегиба $x=\pm\sigma$?

1310. Исследовать направление вогнутости циклоиды

$$x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t)\ (a>0).$$

1311. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в промежутке $a\leqslant x<+\infty$, причем: 1) $f(a)=A>0$; 2) $f'(a)<0$; 3) $f''(x)\leqslant 0$ при $x>a$.

Доказать, что уравнение $f(x)=0$ имеет один и только один действительный корень в интервале $(a,+\infty)$.

1312. Функция $f(x)$ называется *выпуклой снизу* (*сверху*) на интервале (a, b), если для любых точек x_1 и x_2 из этого интервала и произвольных чисел λ_1 и λ_2 $(\lambda_1>0,\ \lambda_2>0,\ \lambda_1+\lambda_2=1)$ имеет место неравенство

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)<\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)$$

(или соответственно противоположное неравенство

$$f(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)>\lambda_1f(x_1)+\lambda_2f(x_2)).$$

Доказать, что: 1) функция $f(x)$ выпукла снизу на (a, b), если $f''(x)>0$, при $a<x<b$; 2) $f(x)$ выпукла сверху на (a, b), если, $f''(x)<0$, при $a<x<b$.

1313. Показать, что функции

$$x^n \ (n > 1), \ e^x, \ x \ln x$$

выпуклы снизу на интервале $(0, +\infty)$, а функции

$$x^n \ (0 < n < 1), \ \ln x$$

выпуклы сверху на интервале $(0, +\infty)$.

1314. Доказать неравенства и выяснить их геометрический смысл:

а) $\frac{1}{2}(x^n + y^n) > \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \quad (x>0,\ y>0,\ x \neq y,\ n>1)$;

б) $\frac{e^x + e^y}{2} > e^{x+y/2} \quad (x \neq y)$;

в) $x \ln x + y \ln y > (x+y) \ln \frac{x+y}{2}$, если $x>0$ и $y>0$.

1314.1. Пусть $f''(x) \geqslant 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$.

Доказать, что

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$$

при любых $x_1, x_2 \in [a, b]$.

1315. Доказать, что ограниченная выпуклая функция всюду непрерывна и имеет односторонние левую и правую производные.

1316. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема в интервале (a, b) и $f''(\xi) \neq 0$, где $a < \xi < b$.

Доказать, что в интервале (a, b) можно найти два значения x_1 и x_2 такие, что

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi).$$

1317. Доказать, что если функция $f(x)$ дважды дифференцируема в бесконечном интервале $(x_0, +\infty)$ и

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x) = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 0,$$

то в интервале $(x_0, +\infty)$ имеется по меньшей мере одна точка ξ такая, что $f''(\xi) = 0$.

§ 9. Раскрытие неопределенностей

1-й случай правила Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\frac{0}{0}$). Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности U_ε *) точки a, где a — число или символ ∞, и при $x \to a$ обе стремятся к нулю:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0;$$

2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют в окрестности U_ε точки a, за исключением, быть может, самой точки a, причем одновременно не обращаются в нуль при $x \neq a$; 3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то имеем:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2-й случай правила Лопиталя (раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$). Если: 1) функции $f(x)$ и $g(x)$ при $x \to a$ обе стремятся к бесконечности:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty,$$

где a — число или символ ∞;

2) производные $f'(x)$ и $g'(x)$ существуют для всех x, принадлежащих некоторой окрестности U_ε точки a и отличных от a, причем

$$f'^2(x) + g'^2(x) \neq 0 \text{ при } x \in U_\varepsilon \text{ и } x \neq a;$$

3) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

то

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Аналогичные правила справедливы для односторонних пределов.

Раскрытие неопределенностей видов $0\cdot\infty$, $\infty - \infty$, 1^∞, 0^0 и т. п. путем алгебраических преобразований и логарифмирова-

---

*) Под окрестностью U_ε точки a понимается совокупность чисел x, удовлетворяющих неравенству: 1) $0 < |x-a| < \varepsilon$, если a — число, и 2) $|x| > 1/\varepsilon$, если a — символ ∞.

ния приводится к раскрытию неопределенностей двух основных типов:

$$\frac{0}{0} \text{ и } \frac{\infty}{\infty}.$$

Определить значения следующих выражений:

1318. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$. 1319. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{ch} x-\cos x}{x^2}$.

1320. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x-x}{x-\sin x}$. 1321. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\operatorname{tg}4x-12\operatorname{tg}x}{3\sin 4x-12\sin x}$.

1322. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}$. 1323. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ctg}x-1}{x^2}$.

1324. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{\sqrt[3]{\operatorname{tg}x}-1}{2\sin^2 x-1}$. 1325. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

1326. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2\sin x^2}$. 1327. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 2x-2\arcsin x}{x^3}$.

1328. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x\sqrt{x}}\left(\sqrt{a}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{a}}-\sqrt{b}\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{x}{b}}\right)$.

1329. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-a^{\sin x}}{x^3}$ $(a>0)$. 1330. $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^x-x}{\ln x-x+1}\right)$.

1331. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$. 1332. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(\cos ax)}{\ln(\cos bx)}$.

1333. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos(\sin x)-\cos x}{x^4}$. 1334. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}\left(\dfrac{1}{\operatorname{th}x}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$.

1335. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{Arsh}(\operatorname{sh}x)-\operatorname{Arsh}(\sin x)}{\operatorname{sh}x-\sin x}$, где $\operatorname{Arsh}x=$ $=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$.

1336. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\varepsilon}}$ $(\varepsilon>0)$.

1337. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}$ $(a>0,\ n>0)$. 1338. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{100}}$.

1339. $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2e^{-0{,}01x}$. 1340. $\lim\limits_{x\to 1-0}\ln x\cdot\ln(1-x)$.

1341. $\lim\limits_{x\to+0}x^{\varepsilon}\ln x$ $(\varepsilon>0)$. 1342. $\lim\limits_{x\to+0}x^x$.

1343. $\lim\limits_{x\to 0}x^{x^x-1}$. 1344. $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^{x^x}-1\right)$.

1345. $\lim\limits_{x\to+0} x^{k/(1+\ln x)}$. 1346. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(1-x)}$.

1347. $\lim\limits_{x\to 1} (2-x)^{\operatorname{tg} \pi x/2}$. 1348. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$.

1349. $\lim\limits_{x\to 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$. 1350. $\lim\limits_{x\to+0} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$.

1351. $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2x+1}\right)^{1/x}$. 1352. $\lim\limits_{x\to a} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} a}\right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$.

1353. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{a^x - x\ln a}{b^x - x\ln b}\right)^{1/x^2}$. 1354. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$.

1355. $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$. 1356. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\operatorname{ctg} x - \frac{1}{x}\right)$.

1357. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\ln(1+x)}\right]$.

1358. $\lim\limits_{x\to a} \frac{a^x - x^a}{x-a}$ $(a>0)$. 1359. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}$.

1360. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(a+x)^x - a^x}{x^2}$ $(a>0)$.

1361. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg} x\right)^x$. 1362. $\lim\limits_{x\to+\infty} (\operatorname{th} x)^x$.

1363. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)^{1/x^2}$. 1363.1. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{1/x^2}$.

1363.2. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{tg} x}{x}\right)^{1/x^2}$ 1363.3. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x}\right)^{1/x^2}$.

1363.4. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\operatorname{Arsh} x}{x}\right)^{1/x^2}$, где $\operatorname{Arsh} x = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

1364. $\lim\limits_{x\to 0} \left[\frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right]^{1/x}$. 1365. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{2}{\pi}\arccos x\right)^{1/x}$.

1366. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{\cos x}{\operatorname{ch} x}\right)^{1/x^2}$. 1367. $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln \operatorname{ch} x}{\sqrt[m]{\operatorname{ch} x} - \sqrt[n]{\operatorname{ch} x}}$.

1368. $\lim\limits_{x\to 0} \left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\operatorname{cth} x}$. 1368.1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$.

1369. $\lim\limits_{x\to+\infty} \left[\sqrt[3]{x^3+x^2+x+1} - \sqrt{x^2+x+1}\cdot\frac{\ln(e^x+x)}{x}\right]$.

1370. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+a)^{1+(1/x)}-x^{1+1/(x+a)}\right]$.

1371. Найти $\lim\limits_{x\to0}\frac{y}{x}$, если кривая $y=f(x)$ входит при $x\to0$ в начале координат (0, 0) ($\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)=0$) под углом α.

1372. Доказать, что $\lim\limits_{x\to+0}x^{f(x)}=1$, если непрерывная кривая $y=f(x)$ входит при $x\to+0$ в начало координат ($\lim\limits_{x\to+0}f(x)=0$) и при $0<x<\varepsilon$ целиком остается внутри острого угла, образованного прямыми: $y=-kx$ и $y=kx$ ($k\neq\infty$).

1373. Доказать, что если для функции $f(x)$ существует вторая производная $f''(x)$, то

$$f''(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)+f(x-h)-2f(x)}{h^2}.$$

1373.1. Исследовать на дифференцируемость в точке $x=0$ функцию:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}, & \text{если } x\neq0;\\ \frac{1}{2}, & \text{если } x=0.\end{cases}$$

1373.2. Найти асимптоту кривой $y=\frac{x^{1+x}}{(1+x)^x}$ $(x>0)$.

1374. Исследовать возможность применения правила Лопиталя к следующим примерам:

а) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sin x}{x+\sin x}$;

в) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{-2x}(\cos x+2\sin x)+e^{-x^2}\sin^2 x}{e^{-x}(\cos x+\sin x)}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+x+\sin x\cos x}{(x+\sin x\cos x)\,e^{\sin x}}$.

1375. Найти предел отношения площади кругового сегмента, имеющего хорду b и стрелку h, к площади равнобедренного треугольника, вписанного в этот сегмент, если дуга сегмента при неизменном радиусе R

стремится к нулю. Пользуясь полученным результатом, вывести приближенную формулу для площади сегмента:

$$S \approx \frac{2}{3} bh.$$

§ 10. Формула Тейлора

1°. Локальная формула Тейлора. Если 1) функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $|x-x_0| < \varepsilon$ точки x_0; 2) $f(x)$ имеет в этой окрестности производные $f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ до $(n-1)$-го порядка включительно; 3) в точке x_0 существует производная n-го порядка $f^{(n)}(x_0)$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o(x-x_0)^n, \tag{1}$$

где

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \quad (k = 0, 1, \ldots, n).$$

В частности, при $x_0 = 0$ имеем:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n). \tag{2}$$

При указанных условиях представление (1) единственно.

Если в точке x_0 существует производная $f^{(n+1)}(x_0)$, то остаточный член в формуле (1) может быть взят в виде $O^*((x-x_0)^{n+1})$.

Из локальной формулы Тейлора (2) получаем следующие пять важных разложений:

I. $e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + o(x^n).$

II. $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}).$

III. $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n \dfrac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$

IV. $(1+x)^m = 1 + mx + \dfrac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots$

$\qquad \ldots + \dfrac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} x^n + o(x^n).$

V. $\ln(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \ldots + (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n} + o(x^n).$

2°. Формула Тейлора. Если 1) функция $f(x)$ определена на сегменте $[a, b]$; 2) $f(x)$ имеет на этом сегменте непрерывные производные $f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$; 3) при $a < x < b$ существует конечная производная $f^{(n)}(x)$, то

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b),$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta(x-a))}{n!}(x-a)^n \quad (0<\theta<1)$$

(*остаточный член в форме Лагранжа*), или

$$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(a+\theta_1(x-a))}{(n-1)!}(1-\theta_1)^{n-1}(x-a)^n \quad (0<\theta_1<1)$$

(*остаточный член в форме Коши*).

1376. Многочлен

$$P(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3$$

расположить по целым неотрицательным степеням двучлена $x+1$.

Написать разложения по целым неотрицательным степеням переменной x до членов указанного порядка включительно следующих функций:

1377. $f(x) = \frac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$ до члена с x^4. Чему равно $f^{(4)}(0)$?

1378. $\frac{(1+x)^{100}}{(1-2x)^{40}(1+2x)^{60}}$ до члена с x^2.

1379. $\sqrt[m]{a^m+x}$ $(a>0)$ до члена с x^2.

1380. $\sqrt{1-2x+x^3} - \sqrt[3]{1-3x+x}$ до члена с x^3.

1381. e^{2x-x^2} до члена с x^5.

1382. $\frac{x}{e^x-1}$ до члена с x^4.

1383. $\sqrt[3]{\sin x^3}$ до члена с x^{13}.

1384. $\ln\cos x$ до члена с x^6

1385. $\sin(\sin x)$ до члена с x^3

1386. $\operatorname{tg} x$ до члена с x^5.

1387. $\ln\frac{\sin x}{x}$ до члена с x^6.

1388. Найти три члена разложения функции $f(x) = \sqrt{x}$ по целым неотрицательным степеням разности $x-1$.

1389. Функцию $f(x) = x^x - 1$ разложить по целым неотрицательным степеням бинома $x-1$ до члена с $(x-1)^3$.

1390. Функцию $y = a\,\mathrm{ch}\frac{x}{a}$ $(a > 0)$ в окрестности точки $x = 0$ приближенно заменить параболой 2-го порядка.

1391. Функцию $f(x) = \sqrt{1+x^2} - x$ $(x > 0)$ разложить по целым неотрицательным степеням дроби $\frac{1}{x}$ до члена с $\frac{1}{x^3}$.

1392. Найти разложение функции $f(h) = \ln(x+h)$ $(x > 0)$ по целым неотрицательным степеням приращения h до члена с h^n (n — натуральное число).

1393. Пусть

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \ldots + \frac{h^n}{n!}f^{(n)}(x+\theta h)$$

$(0 < \theta < 1)$, причем $f^{(n+1)}(x) \neq 0$.

Доказать, что $\lim\limits_{h\to 0}\theta = \frac{1}{n+1}$.

1393.1. Пусть при $x \to 0$ имеем

$$f(x) = 1 + kx + o(x).$$

Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)]^{1/x} = e^k$.

1393.2. Пусть $f(x) \in C^{(2)}[0, 1]$ и $f(0) = f(1) = 0$, причем $|f''(x)| \leqslant A$ при $x \in (0, 1)$. Доказать, что $|f'(x)| \leqslant \frac{A}{2}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1393.3. Пусть $f(x)$ $(-\infty < x < +\infty)$ — дважды дифференцируемая функция и

$$M_k = \sup_{-\infty<x<+\infty} |f^{(k)}(x)| < +\infty \quad (k = 0, 1, 2).$$

Доказать неравенство $M_1^2 \leqslant 2M_0M_2$.

1394. Оценить абсолютную погрешность приближенных формул:

а) $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$;

б) $\sin x \approx x - \dfrac{x^3}{6}$ при $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$;

в) $\operatorname{tg} x \approx x + \dfrac{x^3}{3}$ при $|x| \leqslant 0{,}1$;

г) $\sqrt{1+x} \approx 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8}$ при $0 \leqslant x \leqslant 1$.

1395. Для каких x справедлива с точностью до 0,0001 приближенная формула: $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2}$?

1395.1. Доказать формулу

$$\sqrt[n]{a^n + x} = a + \frac{x}{na^{n-1}} - r$$

$$(n > 2,\ a > 0,\ x > 0),\quad 0 < r < \frac{n-1}{2n^2} \cdot \frac{x^2}{a^{2n-1}}.$$

1396. С помощью формулы Тейлора приближенно вычислить:

а) $\sqrt[3]{30}$; б) $\sqrt[5]{250}$; в) $\sqrt[12]{4000}$;

г) $\sqrt{e}$; д) $\sin 18°$; е) $\ln 1{,}2$;

ж) $\operatorname{arctg} 0{,}8$; з) $\arcsin 0{,}45$; и) $(1{,}1)^{1{,}2}$

и оценить погрешность.

1397. Вычислить:

а) e с точностью до 10^{-9};

б) $\sin 1°$ » » » 10^{-8};

в) $\cos 9°$ » » » 10^{-5};

г) $\sqrt{5}$ » » » 10^{-4};

д) $\lg 11$ » » » 10^{-5}.

Используя разложения I—V, найти следующие пределы:

1398. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4}$. **1399.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x \sin x - x(1+x)}{x^3}$.

1400. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{3/2}\left(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1} - 2\sqrt{x}\right)$.

1401. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt[6]{x^6 + x^5} - \sqrt[6]{x^6 - x^5}\right)$.

1402. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(x^3-x^2+\frac{x}{2}\right)e^{1/x}-\sqrt{x^6+1}\right]$.

1403. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x+a^{-x}-2}{x^2}$ $(a>0)$.

1404. $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x-x^2\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right]$.

1405. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}\right)$. **1406.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}-\operatorname{ctg} x\right)$.

1406.1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(\sin x)-x\sqrt[3]{1-x^2}}{x^5}$.

1406.2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$. **1406.3.** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x)-x}{x^3}$.

Для бесконечно малой при $x\to 0$ величины y определить главный член вида Cx^n (C — постоянная), если

1407. $y=\operatorname{tg}(\sin x)-\sin(\operatorname{tg} x)$.

1408. $y=(1+x)^x-1$. **1409.** $y=1-\frac{(1+x)^{1/x}}{e}$.

1410. При каком подборе коэффициентов a и b величина

$$x-(a+b\cos x)\sin x$$

будет бесконечно малой 5-го порядка относительно x?

1410.1. Подобрать коэффициенты A и B так, чтобы при $x\to 0$ имело место асимптотическое равенство

$$\operatorname{ctg} x=\frac{1+Ax^2}{x+Bx^3}+O(x^5).$$

1410.2. При каких коэффициентах A, B, C и D справедлива при $x\to 0$ асимптотическая формула

$$e^x=\frac{1+Ax+Bx^2}{1+Cx+Dx^2}+O(x^5).$$

1411. Считая $|x|$ малой величиной, вывести простые приближенные формулы для следующих выражений:

а) $\frac{1}{R^2}-\frac{1}{(R+x)^2}$ $(R>0)$;

б) $\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}}-\sqrt[3]{\frac{1-x}{1+x}}$;

в) $\frac{A}{x}\left[1-\left(1+\frac{x}{100}\right)^{-n}\right]$; г) $\frac{\ln 2}{\ln\left(1+\frac{x}{101}\right)}$.

1412. Считая x малым по абсолютной величине, вывести приближенную формулу вида $x = \alpha \sin x + \beta \operatorname{tg} x$ с точностью до члена с x^5.

Применить эту формулу для приближенного спрямления дуг малой угловой величины.

1413. Оценить относительную погрешность следующего *правила Чебышева*: круговая дуга приближенно равна сумме боковых сторон равнобедренного треугольника, построенного на хорде этой дуги и имеющего высотой $\sqrt{4/3}$ ее стрелки.

§ 11. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции

1°. Необходимое условие экстремума. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 экстремум (*максимум* или *минимум*), если функция определена в двухсторонней окрестности точки x_0 и для всех точек x некоторой области: $0 < |x-x_0| < \delta$, выполнено соответственно неравенство

$$f(x) < f(x_0) \text{ или } f(x) > f(x_0).$$

В точке экстремума производная $f'(x_0) = 0$, если она существует.

2°. Достаточные условия экстремума. *Первое правило.* Если 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности $|x-x_0| < \delta$ точки x_0 такой, что $f'(x_0) = 0$ или не существует (*критическая точка*); 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ в области $0 < |x-x_0| < \delta$; 3) производная $f'(x)$ сохраняет определенный знак слева от x_0 и справа от x_0, то поведение функции $f(x)$ характеризуется следующей таблицей:

	Знак производной		Вывод
	$x < x_0$	$x > x_0$	
I	+	+	Экстремума нет
II	+	−	Максимум
III	−	+	Минимум
IV	−	−	Экстремума нет

Второе правило. Если функция $f(x)$ имеет вторую производную $f''(x)$ и в некоторой точке x_0 выполнены условия

$$f'(x_0) = 0 \text{ и } f''(x_0) \neq 0,$$

то в этой точке функция $f(x)$ имеет экстремум, а именно: максимум, когда $f''(x_0) < 0$, и минимум, когда $f''(x_0) > 0$.

Третье правило. Пусть функция $f(x)$ имеет в некотором интервале $|x-x_0| < \delta$ производные $f'(x), \ldots, f^{n-1}(x)$ и в точке x_0 производную $f^{(n)}(x_0)$, причем

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n-1), \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0.$$

В таком случае: 1) если n — число четное, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум, а именно: максимум при $f^{(n)}(x_0) < 0$ и минимум при $f^{(n)}(x_0) > 0$; 2) если n — число нечетное, то в точке x_0 функция $f(x)$ экстремума не имеет.

3°. Абсолютный экстремум. Наибольшее (наименьшее) значение на сегменте $[a, b]$ непрерывной функции $f(x)$ достигается или в критической точке этой функции (т. е. там, где производная $f'(x)$ или равна нулю, или не существует), или в граничных точках a и b данного сегмента.

Исследовать на экстремум следующие функции:

1414. $y = 2 + x - x^2$. **1415.** $y = (x-1)^3$.

1416. $y = (x-1)^4$.

1417. $y = x^m(1-x)^n$ (m и n — целые положительные числа).

1418. $y = \cos x + \operatorname{ch} x$. **1419.** $y = (x+1)^{10} e^{-x}$.

1420. $y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right) e^{-x}$ (n — натуральное число).

1421. $y = |x|$. **1422.** $y = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$.

1423. Исследовать на экстремум в точке $x = x_0$ функцию

$$f(x) = (x-x_0)^n \varphi(x)$$

(n — натуральное число), где функция $\varphi(x)$ непрерывна при $x = x_0$ и $\varphi(x_0) \neq 0$.

1424. Пусть $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, $f'(x) = \frac{P_1(x)}{Q^2(x)}$ и x_0 — стационарная точка функции $f(x)$, т. е. $P_1(x_0) = 0$, $Q(x_0) \neq 0$.

Доказать, что $\operatorname{sgn} f''(x_0) = \operatorname{sgn} P_1'(x_0)$.

1425. Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум, то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки слева от точки x_0 функция $f(x)$ возрастает, а справа от нее убывает?

Рассмотреть пример:

$$f(x)=2-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), \text{ если } x\neq 0 \text{ и } f(0)=2.$$

1426 (н). Доказать, что функция

$$f(x)=e^{-1/x^2}, \text{ если } x\neq 0, \text{ и } f(0)=0,$$

имеет в точке $x=0$ минимум, а функция

$$g(x)=xe^{-1/x^2}, \text{ если } x\neq 0, \text{ и } g(0)=0$$

не имеет в точке $x=0$ экстремума, хотя

$$f^{(n)}(0)=0, \quad g^{(n)}(0)=0 \quad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Построить графики этих функций.

1427. Исследовать на экстремум функции:

а) $f(x)=e^{-1/|x|}\left(\sqrt{2}+\sin\frac{1}{x}\right)$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$;

б) $f(x)=e^{-1/|x|}\left(\sqrt{2}+\cos\frac{1}{x}\right)$ при $x\neq 0$ и $f(0)=0$.

Построить графики этих функций.

1428. Исследовать на экстремум в точке $x=0$ функцию

$$f(x)=|x|\left(2+\cos\frac{1}{x}\right), \text{ если } x\neq 0 \text{ и } f(0)=0.$$

Построить график этой функции.

Найти экстремумы следующих функций:

1429. $y=x^3-6x^2+9x-4$. **1430.** $y=2x^2-x^4$.

1431. $y=x(x-1)^2(x-2)^3$. **1432.** $y=x+\frac{1}{x}$.

1433. $y=\frac{2x}{1+x^2}$. **1434.** $y=\frac{x^2-3x+2}{x^2+2x+1}$.

1435. $y=\sqrt{2x-x^2}$ **1436.** $y=x\sqrt[3]{x-1}$.

1437. $y=xe^{-x}$. **1438.** $y=\sqrt{x}\ln x$.

1439. $y=\dfrac{\ln^2 x}{x}$. **1440.** $y=\cos x+\dfrac{1}{2}\cos 2x$.

1441. $y=\dfrac{10}{1+\sin^2 x}$. **1442.** $y=\operatorname{arctg} x-\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$.

1443. $y=e^x\sin x$. **1444.** $y=|x|\,e^{-|x-1|}$.

Найти наименьшие и наибольшие значения следующих функций:

1445. $f(x)=2^x$ на сегменте $[-1;\ 5]$.
1446. $f(x)=x^2-4x+6$ на сегменте $[-3;\ 10]$.
1447. $f(x)=|x^2-3x+2|$ на сегменте $[-10;\ 10]$.

1448. $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ на сегменте $[0{,}01;\ 100]$.

1449. $f(x)=\sqrt{5-4x}$ на сегменте $[-1;\ 1]$.

Найти нижнюю грань (inf) и верхнюю грань (sup) следующих функций:

1450. $f(x)=xe^{-0{,}01x}$ на интервале $(0,\ +\infty)$.

1451. $f(x)=\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}\right)e^{-x}$ на интервале $(0,\ +\infty)$.

1452. $f(x)=\dfrac{1+x^2}{1+x^4}$ на интервале $(0,\ +\infty)$.

1453. $f(x)=e^{-x^2}\cos x^2$ на интервале $(-\infty,\ +\infty)$.

1454. Определить нижнюю и верхнюю грани функции $f(\xi)=\dfrac{1+\xi}{3+\xi^2}$ на интервале $x<\xi<+\infty$.

Построить графики функций

$$M(x)=\sup_{x<\xi<+\infty} f(\xi) \quad \text{и} \quad m(x)=\inf_{x<\xi<+\infty} f(\xi).$$

1454.1. Пусть

$$M_k=\sup_x \| f^{(k)}(x)\|, \quad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Найти M_0, M_1 и M_2, если $f(x)=e^{-x^2}$.

1455. Определить наибольший член последовательности:

а) $\dfrac{n^{10}}{2^n}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$; б) $\dfrac{\sqrt{n}}{n+10000}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$;

в) $\sqrt[n]{n}$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$.

1456. Доказать неравенства:

а) $|3x-x^3|\leqslant 2$ при $|x|\leqslant 2$;

б) $\frac{1}{2^{p-1}}\leqslant x^p+(1-x)^p\leqslant 1$, если $0\leqslant x\leqslant 1$ и $p>1$;

в) $x^m(a-x)^n\leqslant \frac{m^n n^n}{(m+n)^{m+n}}a^{m+n}$ при $m>0$, $n>0$ и $0\leqslant x\leqslant a$;

г) $\frac{x+a}{2^{(n-1)/n}}\leqslant\sqrt[n]{x^n+a^n}\leqslant x+a$ $(x>0,\ a>0,\ n>1)$;

д) $|a\sin x+b\cos x|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}$.

1456.1. Доказать неравенство

$$\frac{2}{3}\leqslant\frac{x^2+1}{x^2+x+1}\leqslant 2$$

при $-\infty<x<+\infty$.

1457. Определить «отклонение от нуля» многочлена

$$P(x)=x(x-1)^2(x+2)$$

на сегменте $[-2,\ 1]$, т. е. найти

$$E_p=\sup_{-2\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|.$$

1458. При каком выборе коэффициента q многочлен

$$P(x)=x^2+q$$

наименее отклоняется от нуля на сегменте $[-1,\ 1]$, т. е.

$$E_p=\sup_{-1\leqslant x\leqslant 1}|P(x)|=\min.$$

1459. *Абсолютным отклонением* двух функций $f(x)$ и $g(x)$ на сегменте $[a,\ b]$ называется число

$$\Delta=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)-g(x)|.$$

Определить абсолютное отклонение функций:

$$f(x)=x^2 \text{ и } g(x)=x^3$$

на сегменте $[0,\ 1]$.

1460. Функцию $f(x)=x^2$ на сегменте $[x_1,\ x_2]$ приближенно заменить линейной функцией

$$g(x)=(x_1+x_2)x+b$$

так, чтобы абсолютное отклонение функций $f(x)$ и $g(x)$

(см. предыдущую задачу) было наименьшим, и определить это наименьшее абсолютное отклонение.

1461. Определить минимум функции

$$f(x) = \max\{2|x|,\ |1+x|\}.$$

Определить число вещественных корней уравнения и отделить эти корни, если:

1462. $x^3-6x^2+9x-10=0$.

1463. $x^3-3x^2-9x+h=0$.

1464. $3x^4-4x^3-6x^2+12x-20=0$.

1465. $x^5-5x=a$.

1466. $\ln x = kx$. **1467.** $e \ = ax^2$.

1468. $\sin^3 x\cdot\cos x = a$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

1469. $\operatorname{ch} x = kx$.

1470. При каком условии уравнение $x^3+px+q=0$ имеет: а) один вещественный корень; б) три вещественных корня. Изобразить соответствующие области на плоскости $(p,\ q)$.

§ 12. Построение графиков функций по характерным точкам

Для построения графика функции $y=f(x)$ нужно: 1) определить область существования этой функции и исследовать поведение функции в граничных точках последней; 2) выяснить симметрию графика и периодичность; 3) найти точки разрыва функции и промежутки непрерывности; 4) определить нули функции и области постоянства знака; 5) найти точки экстремума и выяснить промежутки возрастания и убывания функции; 6) определить точки перегиба и установить промежутки вогнутости определенного знака графика функции; 7) найти асимптоты в случае существования их; 8) указать те или иные особенности графика. В частных случаях общая схема упрощается.

В задачах, отмеченных звездочкой, точки перегиба определяются приближенно.

Построить графики следующих функций:

1471. $y=3x-x^3$. **1472.** $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$.

1473. $y=(x+1)(x-2)^2$. **1474*.** $y=\dfrac{2-x^2}{1+x^4}$.

1475*. $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$. **1476*.** $y=\dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2}$.

1477. $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$. **1478.** $y=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$.

1479. $y = \dfrac{x^3(x-1)}{(x+1)^2}$. **1480.** $y = \dfrac{x}{(1-x^2)^2}$.

1481. $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$. **1482*.** $y = \dfrac{x^4+8}{x^3+1}$.

1483. $y = \dfrac{1}{1+x} - \dfrac{10}{3x^2} + \dfrac{1}{1-x}$. **1484.** $y = (x-3)\sqrt{x}$.

1485. $y = \pm\sqrt{8x^2 - x^4}$. **1485.1.** $y = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$.

1486. $y = \pm\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$.

1487*. $y = \sqrt[3]{x^3 - x^2 - x + 1}$.

1488. $y = \sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x^2+1}$.

1489. $y = (x+2)^{2/3} - (x-2)^{2/3}$.

1490. $y = (x+1)^{2/3} + (x-1)^{2/3}$. **1491.** $y = \dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$.

1492. $y = \dfrac{x^2\sqrt{x^2-1}}{2x^2-1}$. **1493.** $y = \dfrac{|1+x|^{3/2}}{\sqrt{x}}$.

1494. $y = 1 - x + \sqrt{\dfrac{x^3}{3+x}}$. **1495.** $y = \sqrt[3]{\dfrac{x^2}{x+1}}$.

1496*. $y = \sqrt{\dfrac{x^4+3}{x^2+1}}$. **1497.** $y = \sin x + \cos^2 x$.

1498. $y = (7 + 2\cos x)\sin x$. **1499.** $y = \sin x + \dfrac{1}{3}\sin 3x$.

1500. $y = \cos x - \dfrac{1}{2}\cos 2x$. **1501.** $y = \sin^4 x + \cos^4 x$.

1502. $y = \sin x \cdot \sin 3x$. **1503.** $y = \dfrac{\sin x}{\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)}$.

1504. $y = \dfrac{\cos x}{\cos 2x}$. **1504.1.** $y = \dfrac{\sin x}{2 + \cos x}$.

1505. $y = 2x - \operatorname{tg} x$. **1506.** $y = e^{2x - x^2}$.

1507. $y = (1 + x^2)e^{-x^2}$. **1508.** $y = x + e^{-x}$.

1509. $y = x^{2/3}e^{-x}$. **1509.1.** $y = e^{-2x}\sin^2 x$.

1510. $y=\dfrac{e^x}{1+x}$. **1511.** $y=\sqrt{1-e^{-x^2}}$.

1512. $y=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$. **1513.** $y=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

1514. $y=\sqrt{x^2+1}\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

1515. $y=\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. **1516.** $y=x+\operatorname{arctg} x$.

1517. $y=\dfrac{x}{2}+\operatorname{arcctg} x$. **1518.** $y=x\operatorname{arctg} x$.

1519. $y=\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}$. **1520.** $y=\arccos\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$.

1521. $y=(x+2)e^{1/x}$. **1522.** $y=2^{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}$.

1523*. $y=\ln\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+1}$.

1524. $y=a\arcsin\dfrac{x}{a}-\sqrt{a^2-x^2}$ $(a>0)$.

1525. $y=\arccos\dfrac{1-x}{1-2x}$. **1526.** $y=x^x$.

1527*. $y=x^{1/x}$. **1528.** $y=(1+x)^{1/x}$.

1529*. $y=x\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ $(x>0)$.

1530*. $y=\dfrac{e^{1/1-x^2}}{1+x^2}$ (без исследования вогнутости).

Построить кривые, заданные в параметрической форме:

1531. $x=\dfrac{(t+1)^2}{4}$, $y=\dfrac{(t-1)^2}{4}$.

1532. $x=2t-t^2$, $y=3t-t^3$.

1533*. $x=\dfrac{t^2}{t-1}$, $y=\dfrac{t}{t^2-1}$.

1534. $x=\dfrac{t^2}{1-t^2}$, $y=\dfrac{1}{1+t^2}$.

1535. $x=t+e^{-t}$, $y=2t+e^{-2t}$.

1536. $x=a\cos 2t$, $y=a\cos 3t$ $(a>0)$.

1537. $x = \cos^4 t, \qquad y = \sin^4 t.$

1538. $x = t \ln t, \qquad y = \dfrac{\ln t}{t}.$

1539. $x = \dfrac{a}{\cos^3 t}, \qquad y = a \operatorname{tg}^3 t \quad (a > 0.)$

1540. $x = a(\operatorname{sh} t - t), \qquad y = a(\operatorname{ch} t - 1) \quad (a > 0).$

Представив уравнения кривых в параметрической форме, построить эти кривые, если

1541. $x^3 + y^3 - 3axy = 0 \ (a > 0).$

Указание. Положить $y = tx$.

1542. $x^2 + y^2 = x^4 + y^4.$

1543. $x^2y^2 = x^3 - y^3.$

1544. $x^y = y^x \ (x > 0,\ y > 0).$

1545. Построить график кривой: $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{ch}^2 y = 1.$

Построить графики функций, заданных в полярной системе координат (φ, r) $(r \geqslant 0)$:

1546. $r = a + b \cos \varphi \quad (0 < a \leqslant b).$

1547. $r = a \sin 3\varphi \ (a > 0).$ 1548. $r = \dfrac{a}{\sqrt{\cos 3\varphi}} \ (a > 0).$

1549*. $r = a \dfrac{\operatorname{th} \varphi}{\varphi - 1}$, где $\varphi > 1 \quad (a > 0).$

1550*. $\varphi = \arccos \dfrac{r-1}{r^2}.$

Построить графики семейств кривых (a — переменный параметр):

1551. $y = x^2 - 2x + a.$ 1552. $y = x + \dfrac{a^2}{x}.$

1553. $y = x \pm \sqrt{a(1 - x^2)}.$

1554. $y = \dfrac{x}{2} + e^{-ax}.$ 1555. $y = xe^{-x/a}.$

§ 13. Задачи на максимум и минимум функций

1556. Доказать, что если функция $f(x)$ неотрицательна, то функция $F(x) = Cf^2(x)$ $(C > 0)$ имеет в точности те же точки экстремума, что и функция $f(x)$.

1557. Доказать, что если функция $\varphi(x)$ — монотонно возрастающая в строгом смысле при $-\infty < x < +\infty$, то функции $f(x)$ и $\varphi(f(x))$ имеют одни и те же точки экстремума.

1558. Определить наибольшее значение произведения m-й и n-й степеней ($m > 0$, $n > 0$) двух положительных чисел, сумма которых постоянна и равна a.

1559. Найти наименьшее значение суммы m-й и n-й степеней ($m > 0$, $n > 0$) двух положительных чисел, произведение которых постоянно и равно a.

1560. В каких системах логарифмов существуют числа, равные своему логарифму?

1561. Из всех прямоугольников данной площади S определить тот, периметр которого наименьший.

1562. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, если сумма катета и гипотенузы его постоянна.

1563. При каких линейных размерах закрытая цилиндрическая банка данной вместимости V будет иметь наименьшую полную поверхность?

1564. В данный круговой сегмент, не превышающий полукруга, вписать прямоугольник с наибольшей площадью.

1565. В эллипс $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ вписать прямоугольник со сторонами, параллельными осям эллипса, площадь которого наибольшая.

1566. В треугольник с основанием b и высотой h вписать прямоугольник с наибольшим периметром.

Исследовать возможность решения этой задачи.

1567. Из круглого бревна диаметра d вытесывается балка с прямоугольным поперечным сечением, основание которого равно b и высота h. При каких размерах балка будет иметь наибольшую прочность, если прочность ее пропорциональна bh^2?

1568. В полушар радиуса R вписать прямоугольный параллелепипед с квадратным основанием наибольшего объема.

1569. В шар радиуса R вписать цилиндр наибольшего объема.

1570. В шар радиуса R вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

1571. Около данного шара описать конус наименьшего объема.

1572. Найти наибольший объем конуса с данной образующей l.

1573. В прямой круговой конус с углом 2α в осевом сечении и радиусом основания R вписать цилиндр с наибольшей полной поверхностью.

1574. Найти кратчайшее расстояние точки $M(p, p)$ от параболы $y^2 = 2px$.

1575. Найти кратчайшее и наибольшее расстояния точки $A(2,0)$ от окружности $x^2 + y^2 = 1$.

1576. Найти наибольшую хорду эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(0 < b < a)$, проходящую через вершину $B(0, -b)$.

1577. Через точку $M(x, y)$ эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ провести касательную, образующую с осями координат треугольник, площадь которого наименьшая.

1578. Тело представляет собой прямой круговой цилиндр, завершенный сверху полушаром. При каких линейных размерах это тело будет иметь наименьшую полную поверхность, если объем его равен V.

1579. Поперечное сечение открытого канала имеет форму равнобедренной трапеции. При каком наклоне φ боков «мокрый периметр» сечения будет наименьшим, если площадь «живого сечения» воды в канале равна S, а уровень воды равен h?

1580. «*Извилистостью*» замкнутого контура, ограничивающего площадь S, называется отношение периметра этого контура к длине окружности, ограничивающей круг той же площади S.

Какова форма равнобедренной трапеции $ABCD$ $(AD \parallel BC)$, обладающей наименьшей извилистостью, если основание $AD = 2a$ и острый угол $BAD = \alpha$?

1581. Какой сектор следует вырезать из круга радиуса R, чтобы из оставшейся части можно было свернуть воронку наибольшей вместимости.

1582. Завод A отстоит от железной дороги, идущей с юга на север и проходящей через город B, считая по кратчайшему расстоянию, на a км. Под каким углом φ к железной дороге следует построить подъездной путь от завода, чтобы транспортировка грузов из A в B была наиболее экономичной, если стоимость провоза тонны груза на расстоянии 1 км составляет по подъездному пути p р., по железной дороге q р. $(p > q)$ и город B расположен на b км севернее завода A?

1583. Два корабля плывут с постоянными скоростями u и v по прямым линиям, составляющим угол θ

между собой. Определить наименьшее расстояние между кораблями, если в некоторый момент расстояния их от точки пересечения путей были соответственно равны a и b.

1584. В точках A и B находятся источники света соответственно силой S_1 и S_2 свечей. На отрезке $AB = a$ найти наименее освещенную точку M.

1585. Светящаяся точка находится на линии центров двух непересекающихся шаров радиусов R и r ($R > r$) и расположена вне этих шаров. При каком положении точки сумма освещенных частей поверхностей шаров будет наибольшая?

1586. На какой высоте над центром круглого стола радиуса a следует поместить электрическую лампочку, чтобы освещенность края стола была наибольшей?

Указание. Яркость освещения выражается формулой

$$I = k\frac{\sin\varphi}{r^2},$$

где φ — угол наклона лучей, r — расстояние источника света от освещаемой площадки, k — сила источника света.

1587. К реке шириной a м построен под прямым углом канал шириной b м. Какой максимальной длины суда могут входить в этот канал?

1588. Суточные расходы при плавании судна состоят из двух частей: постоянной, равной a р, и переменной, возрастающей пропорционально кубу скорости. При какой скорости v плавание судна будет наиболее экономичным?

1589. Груз весом P, лежащий на горизонтальной шероховатой плоскости, требуется сдвинуть с места приложенной силой. При каком наклоне этой силы к горизонту величина ее будет наименьшей, если коэффициент трения груза равен k?

1590. В чашку, имеющую форму полушара радиуса a, опущен стержень длины $l > 2a$. Найти положение равновесия стержня.

§ 14. Касание кривых. Круг кривизны. Эволюта

1°. Касание n-го порядка. Говорят, что кривые

$$y = \varphi(x) \quad \text{и} \quad \tilde{y} = \psi(x)$$

имеют в точке x_0 *касание n-го порядка* (в строгом смысле!), если $\varphi^{(k)}(x_0) = \psi^{(k)}(x_0)$ ($k = 0, 1, \ldots, n$) и $\varphi^{(n+1)}(x_0) \neq \psi^{(n+1)}(x_0)$.

В этом случае при $x \to x_0$ имеем:

$$\varphi(x) - \psi(x) = O^* [x - x_0]^{n+1}.$$

2°. Круг кривизны. Окружность

$$(x - \xi)^2 + (y - \eta^2) = R^2,$$

имеющая с данной кривой $y = f(x)$ касание не ниже 2-го порядка, называется *кругом кривизны* в соответствующей точке. Радиус этого круга

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{|y''|}$$

называется *радиусом кривизны*, а величина $k = \frac{1}{R}$ — *кривизной*.

3°. Эволюта. Геометрическое место центров (ξ, η) кругов кривизны (*центры кривизны*)

$$\xi = x - \frac{y'(1 + y'^2)}{y''}, \quad \eta = y + \frac{1 + y'^2}{y''}$$

называется *эволютой* данной кривой $y = f(x)$.

1591. Подобрать параметры k и b прямой $y = kx + b$ так, чтобы она имела с кривой $y = x^3 - 3x^2 + 2$ касание порядка выше первого.

1592. При каком выборе коэффициентов a, b и c парабола

$$y = ax^2 + bx + c$$

имеет в точке $x = x_0$ касание 2-го порядка с кривой $y = e^x$?

1593. Какой порядок касания с осью Ox имеют в точке $x = 0$ кривые:

а) $y = 1 - \cos x$; б) $y = \operatorname{tg} x - \sin x$;

в) $y = e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$.

1594. Доказать, что кривая $y = e^{-1/x^2}$ при $x \neq 0$ и $y = 0$ при $x = 0$ имеет в точке $x = 0$ с осью Ox касание бесконечно большого порядка.

1595. Найти радиус и центр кривизны гиперболы $xy = 1$ в точках: а) $M(1, 1)$; б) $N(100; 0{,}01)$.

Определить радиусы кривизны следующих кривых:

1596. Параболы $y^2 = 2px$.

1597. Эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ $(a \geqslant b > 0)$.

1598. Гиперболы $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

1599. Астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

1600. Эллипса $x = a\cos t$, $y = b\sin t$.

1601. Циклоиды $x = a(t-\sin t)$, $y = a(1-\cos t)$.

1602. Эвольвенты круга $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$.

1603. Доказать, что радиус кривизны линии 2-го порядка $y^2 = 2px - qx^2$ пропорционален кубу отрезка нормали.

1604. Написать формулу радиуса кривизны линии, заданной в полярных координатах.

Определить радиусы кривизны кривых, заданных в полярных координатах (параметры положительны):

1605. Спирали Архимеда $r = a\varphi$.

1606. Логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$.

1607. Кардиоиды $r = a(1+\cos\varphi)$.

1608. Лемнискаты $r^2 = a^2\cos 2\varphi$.

1609. На кривой $y = \ln x$ найти точку, кривизна в которой наибольшая.

1610. Максимальная кривизна кубической параболы $y = \frac{kx^3}{6}$ $(0 \leqslant x < +\infty,\ k > 0)$ равна $\frac{1}{1000}$. Найти точку x, в которой достигается эта максимальная кривизна.

Составить уравнения:

1611. Эволюты параболы $y^2 = 2px$.

1612. Эволюты эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

1613. Эволюты астроиды $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

1614. Эволюты трактрисы

$$x = a\ln\frac{a+\sqrt{a^2-y^2}}{y}-\sqrt{a^2-y^2}.$$

1615. Эволюты логарифмической спирали $r = ae^{m\varphi}$.

1616. Доказать, что эволюта циклоиды

$$x = a(t-\sin t),\quad y = a(1-\cos t)$$

есть также циклоида, отличающаяся от данной только положением.

§ 15. Приближенное решение уравнений

1°. **Правило пропорциональных частей (метод хорд).** Если функция $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a, b]$ и

$$f(a)\,f(b) < 0,$$

причем $f'(x) \neq 0$ при $a < x < b$, то уравнение

$$f(x) = 0 \tag{1}$$

имеет один и только один действительный корень ξ в промежутке (a, b). За первое приближение этого корня можно принять значение

$$x_1 = a + \delta_1,$$

где

$$\delta_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a).$$

Применяя далее этот способ к тому из промежутков (a, x_1) или (x_1, b), на концах которого функция $f(x)$ разнозначна, получим второе приближение x_2 корня ξ и т. д. Для оценки n-го приближения x_n справедлива формула

$$|x_n - \xi| \leqslant \frac{|f(x_n)|}{m}, \tag{2}$$

где $m = \inf\limits_{a<x<b} |f'(x)|$, причем

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \xi.$$

2°. **Правило Ньютона (метод касательных).** Если $f''(x) \neq 0$ на сегменте $[a, b]$ и $f(a)\,f''(a) > 0$, то за первое приближение ξ_1 корня ξ уравнения (1) можно принять значение

$$\xi_1 = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Повторяя этот прием, получаем быстро сходящиеся к корню ξ последовательные приближения ξ_n ($n = 1, 2, \ldots$), точность которых оценивается, например, по формуле (2).

Для грубой ориентировки полезно нарисовать набросок графика функции $y = f(x)$.

Пользуясь методом пропорциональных частей, определить с точностью до 0,001 корни следующих уравнений:

1617. $x^3 - 6x + 2 = 0$. **1618.** $x^4 - x - 1 = 0$.

1619. $x - 0{,}1 \sin x = 2$. **1620.** $\cos x = x^2$.

Пользуясь методом Ньютона, определить с указанной точностью корни следующих уравнений:

1621. $x^2+\frac{1}{x^2}=10x$ (с точностью до 10^{-3}).

1622. $x\lg x=1$ (с точностью до 10^{-4}).

1623. $\cos x\cdot\operatorname{ch} x=1$ (с точностью до 10^{-3}) (для положительного корня).

1624. $x+e^x=0$ (с точностью до 10^{-5}).

1625. $x\operatorname{th} x=1$ (с точностью до 10^{-6}).

1626. С точностью до 0,001 найти три первых положительных корня уравнения $\operatorname{tg} x=x$.

1627. С точностью до 10^{-3} найти два положительных корня уравнения $\operatorname{ctg} x=\frac{1}{x}-\frac{x}{2}$.